



**GDAŃSK UNIVERSITY  
OF TECHNOLOGY**

Wydział Elektrotechniki i  
Automatyki



**Autoreferat rozprawy doktorskiej**

# **Drgania tarcz łożyskowych silników asynchronicznych wymuszane siłami elektromagnetycznymi**

**Autor: Łukasz Łudziński**

**Promotor: dr hab. inż. Dariusz Karkosiński, prof. nadzw. PG**

Gdańsk, rok 2018

**Spis treści**

<b>1. Wprowadzenie</b>	<b>3</b>
1.1. Wstęp	3
1.2. Przyczyny drgań silników asynchronicznych	4
1.3. Drgania tarcz łożyskowych	4
1.4. Cel, zakres i teza rozprawy	6
<b>2. Modelowanie drgań silnika asynchronicznego</b>	<b>8</b>
2.1. Klasyfikacja postaci drgań kadłuba silników asynchronicznych	8
2.2. Analiza modalna metodą elementów skończonych	9
2.2.1. Drgania własne tarczy	10
2.2.2. Drgania własne stojana	12
2.2.3. Drgania własne kompletnego silnika	13
<b>3. Metodyka pomiarowych analiz postaci drgań tarcz łożyskowych</b>	<b>14</b>
3.1. Eksploatacyjne postacie drgań	14
3.2. Metody badań przy pomocy dopplerowskiego lasera skanującego	16
<b>4. Badania drgań tarczy łożyskowej podczas pracy silnika</b>	<b>18</b>
4.1. Analiza widm drgań tarczy łożyskowej	19
4.2. Analiza postaci drgań tarczy łożyskowej	24
<b>5. Analiza mechanizmów elektromagnetycznych wymuszeń drgań tarcz łożyskowych z wykorzystaniem modelowania MES</b>	<b>31</b>
5.1. Weryfikacja poprawności modelu MES	31
5.2. Analiza oddziaływania wibracyjnych odkształceń kadłuba na osiowe odkształcenia tarcz łożyskowych - silnik o mocy 2,2 kW	33
5.3. Analiza oddziaływania wibracyjnych odkształceń kadłuba na osiowe odkształcenia tarcz łożyskowych - silnik o mocy 7,5 kW	37
<b>6. Podsumowanie</b>	<b>39</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>41</b>

# 1. WPROWADZENIE

## 1.1. Wstęp

Silniki asynchroniczne mają największe przemysłowe zastosowanie ze wszystkich silników elektrycznych. W przemyśle silnik klatkowy jest szeroko stosowany, gdyż odznacza się dużą niezawodnością, przede wszystkim z powodu braku ruchomych styków, takich jak szczotki i komutator. Dzięki rozwojowi technik napędowych i możliwości regulacyjnych istnieje dzisiaj możliwość uzyskania dużych wartości momentu obrotowego przy niskiej prędkości kątowej. Dzięki temu silniki asynchroniczne wyparły z wielu zastosowań napędy prądu stałego. Powyższe zalety sprawiają, że trójfazowe silniki asynchroniczne klatkowe nadają się do zastosowań trakcyjnych, nie tylko w pojazdach szynowych, ale również w nowoczesnych, koncepcyjnych, a dziś również użytkowanych samochodach elektrycznych.

Równocześnie z rozwojem maszyn elektrycznych pojawił się problem drgań i hałasu emitowanego przez te maszyny. Dotyczyło to szczególnie silników asynchronicznych. Dodatkowo dążenie producentów do obniżenia kosztów i zmniejszenia ilości materiałów do wytworzenia maszyn elektrycznych, zmniejszenia wymiarów maszyny przy tej samej mocy, powodowała wzrost emisji hałasu.

Dziś jednym z kryteriów oceny jakości napędów jest pomiar generowanych drgań i hałasu. W wyniku wzrastających wymagań jakościowych oraz norm stosowanych w Europie, producenci starają się projektować i wytwarzać maszyny emitujące jak najmniej drgań i hałasu. Jest to czynnik decydujący o komforcie użytkowania, sukcesie rynkowym, a co za tym idzie, zysku z danego produktu [6, 8].

Niniejsza rozprawa doktorska dotyczy wybranego elementu silnika elektrycznego, jakim są tarcze łożyskowe. Wiele prac poświęconych było drganiom i hałasowi emitowanemu przez maszyny elektryczne, w tym asynchroniczne silniki klatkowe. Skupiano się głównie na korpusie silnika. Chociaż konstruktorzy silników od lat zdają sobie sprawę z tłumiącego działania tarcz łożyskowych, to przyjmuje się, że w maszynach małej mocy mają one głównie usztywnić kadłub i przy bardzo małej szczelinie powietrznej zapobiec ocieraniu się wirnika o stojan. Powszechnie uważa się, że tarcze łożyskowe drgają i hałasują w wyniku pracy łożysk. Ponadto często pomija się wpływ drgań tarcz na ogólne widmo hałasu silnika.

## 1.2. Przyczyny drgań silników asynchronicznych

Asynchroniczny silnik klatkowy jest złożoną strukturą będącą źródłem drgań mechanicznych i fal akustycznych o różnym podłożu ich powstawania. Ze względu na mechanizm powstawania drgań można je podzielić na aerodynamiczne, mechaniczne, elektryczne i elektromagnetyczne [1, 2, 12, 14, 15, 19, 20, 24, 27, 30, 31].

Wiele wyników prowadzonych prac badawczych, np. [4, 5, 9, 22] pokazuje, że największym źródłem drgań i hałasu w małych silnikach asynchronicznych, szczególnie czterobiegunowych i sześciobiegunowych, są zjawiska magnetyczne będące następstwem panującego zmiennego w czasie i przestrzeni pola magnetycznego. Siły ogólnie nazwane magnetycznymi podzielić można na trzy rodzaje związane ze źródłem ich pochodzenia:

- Siły elektromagnetyczne Lorentza działające w wyniku współdziałania okładu prądu z polem magnetycznym;
- Magnetostrykcja działająca w rdzeniach maszyny;
- Siły reluktancyjne Maxwella działające na granicy dwóch ośrodków o różnej przenikalności magnetycznej.

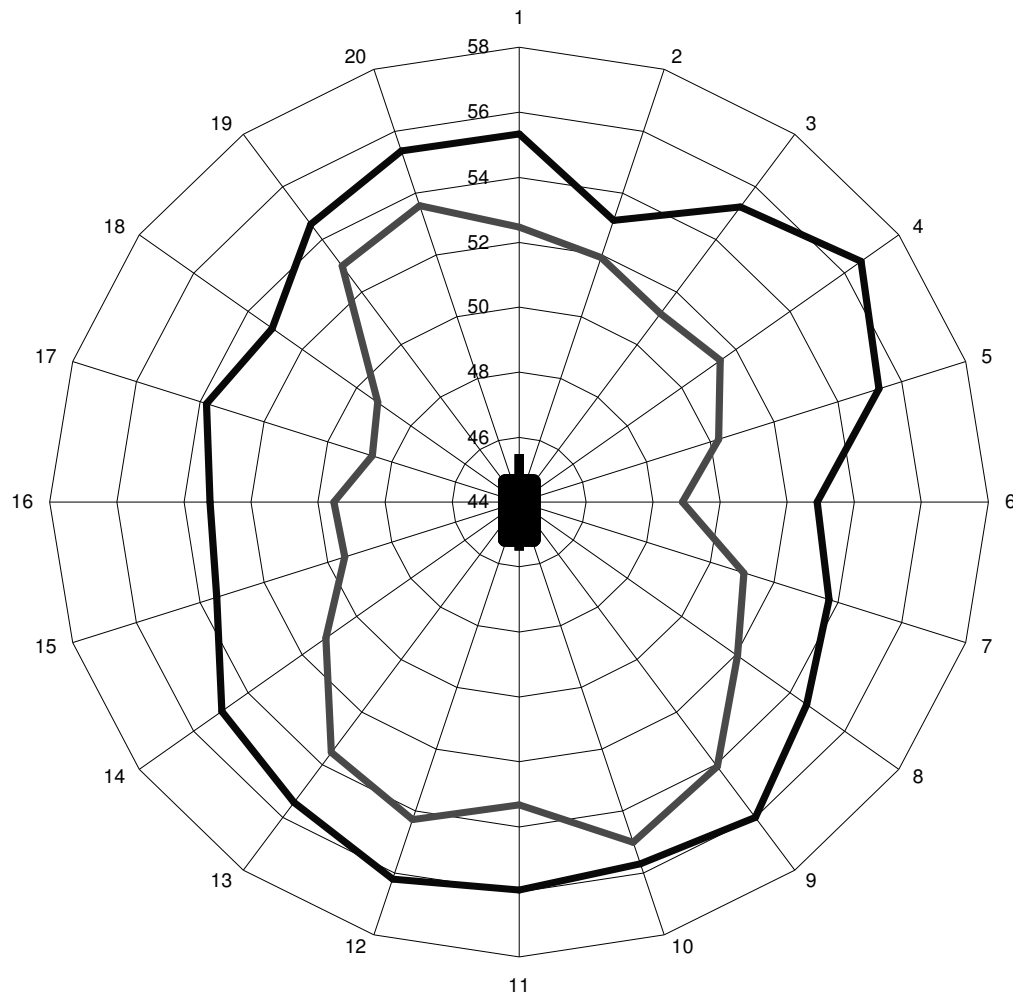
Wszystkie mechanizmy w różnym stopniu biorą udział w tworzeniu widma drgań silnika asynchronicznego.

## 1.3. Drgania tarcz łożyskowych

W wielu pracach i badaniach prowadzonych na dużych silnikach asynchronicznych stwierdzono mało znaczący wpływ drgań i hałasu emitowanego przez tarcze łożyskowe, przez co drgania tarcz był często pomijany również w silnikach małej mocy. Dopiero w nowszych badaniach [10, 12, 29] wskazano na znaczący udział zjawisk drgań wibroakustycznych tarcz łożyskowych dla silników małej mocy. Wskazują na to między innymi charakterystyki ciśnienia akustycznego wokół silnika.

Z rysunku 2.1 wynika, że zarówno dla napięcia 400 V, jak i obniżonego napięcia 96 V, poziom ciśnienia akustycznego jest największy w okolicach tarcz łożyskowych. Przy obniżeniu napięcia z 400 V do 96 V i założeniu proporcjonalnej zależności pomiędzy napięciem i indukcją w szczelinie powietrznej, uzyskano ok. 17-krotne obniżenie wymuszenia magnetycznego. Nie przekłada się to jednak bezpośrednio na poziom drgań i

świadczy o skomplikowanych powiązaniach zjawisk mechanicznych i magnetycznych wpływających na poziom ciśnienia akustycznego wokół maszyny. Skłania to do spojrzenia na tarcze łożyskowe w silniku asynchronicznym w nowym świetle i poszukiwania przyczyn ich zwiększonej wibroakustyczności.



Rys. 1.1. Charakterystyka kierunkowa wypadkowego poziomu ciśnienia akustycznego silnika asynchronicznego (5,5 kW), bez przewietrznika, bieg jałowy przy napięciu zasilania 400 V – zewnętrzny kontur i przy 96 V – wewnętrzny kontur [10, 12]

Generalnie, na tarczę łożyskową może działać wiele sił i momentów gnących. Bezpośrednio mogą działać zarówno siły pochodzące z naprężeń stojana, jak i siły pochodzące z wału silnika przenoszące się poprzez węzły łożyskowe. Efekt drgań tarcz łożyskowych potwierdzony został również współczesnymi badaniami [12, 17, 32, 33, 34].

#### 1.4. Cel, zakres i tezy rozprawy

Głównym celem niniejszej rozprawy jest określenie związków i mechanizmów drgań tarcz łożyskowych z wymuszeniami elektromagnetycznymi stojana. Przyjętymi metodami realizacji celu rozprawy jest obliczeniowa i pomiarowa analiza eksploatacyjnych drgań tarczy łożyskowej w silniku asynchronicznym klatkowym małej mocy, w szczególności pochodzących od wymuszeń elektromagnetycznych.

Celem jest również stworzenie matematycznego modelu mechanicznego struktury maszyny pozwalającego na zidentyfikowanie źródeł wymuszeń drgań tarczy łożyskowej oraz porównanie modelu z wynikami pomiarów. Model ten powinien, między innymi, umożliwić wyznaczenie sił reluktancyjnych (sił Maxwella) działających na pakiet stojana w zakresie zbadania ilościowego i jakościowego ich przenoszenia się na tarczę łożyskową.

Zagadnienie zidentyfikowania źródeł drgań tarcz jest najistotniejszym zadaniem niniejszej rozprawy jako możliwości późniejszej minimalizacji drgań, a co za tym idzie również obniżenia poziomu emitowanego hałasu przez szeroko stosowane silniki asynchroniczne.

Niniejsza rozprawa obejmuje zjawiska wibracyjne powstające na tarczach łożyskowych seryjnie produkowanych silników asynchronicznych klatkowych przy zasilaniu sieciowym. W pierwszej części przedstawiono syntetyczne wyniki przeprowadzonego studium literaturowego w zakresie stanu wiedzy i podstaw modeli matematycznych zjawisk wibracyjnych w silnikach asynchronicznych małej mocy. W szczególności omówiono klasyfikację modalnych i operacyjnych postaci drgań kadłuba i tarcz łożyskowych.

W drugiej części opisano metody badania drgających struktur, w szczególności prowadzące do wyznaczania postaci drgań powierzchni maszyn elektrycznych podczas ich pracy. Zdefiniowano możliwości pomiarowe skanującego lasera dopplerowskiego, w tym metodę wyznaczania funkcji ODSFRF.

Trzecia część rozprawy dotyczy przeprowadzonych serii pomiarów silnika pracującego na biegu jałowym. Na podstawie pomiarów i obliczeń zidentyfikowano główne składowe widma drgań tarcz łożyskowych. Przedstawiono i przeanalizowano wyniki badań silnika z tarczami żeliwnymi przy zasilaniu napięciem znamionowym oraz przy napięciu obniżonym oraz z łożyskami tocznymi i specjalnie wykonanymi łożyskami ślizgowymi.

Czwarta część jest poświęcona obliczeniom numerycznym, w których przy zaimplementowanej w programie Autodesk Inventor metodzie elementów skończonych MES wyznaczono i powiązано ze sobą wibracyjne odkształcenia tarczy z odkształceniami kadłuba silnika asynchronicznego o mocy 2,2 kW i 7,5 kW.

Sformułowano następujące tezy rozprawy:

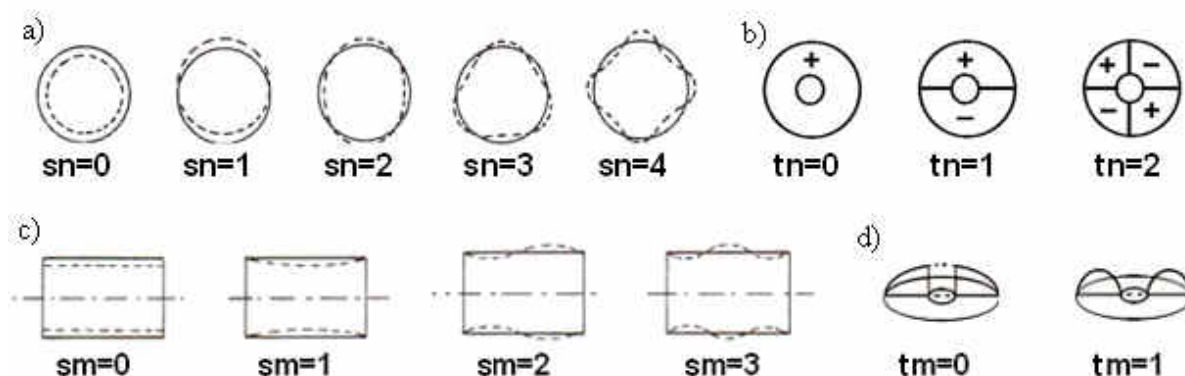
**I. Dominujące składowe widma drgań tarcz łożyskowych silników asynchronicznych małej mocy są wynikiem wymuszeń przez reluktancyjne naprężenia (naciski jednostkowe) na wewnętrznej powierzchni stojana.**

**II. Poszczególne postacie drgań stojana generują odpowiadające im postacie wibracyjnych odkształceń tarcz łożyskowych powstające w wyniku złożonych interakcji w zamkach tarcz i węzłach łożyskowych.**

## 2. MODELOWANIE DRGAŃ SILNIKA ASYNCHRONICZNEGO

### 2.1. Klasyfikacja postaci drgań kadłuba silników asynchronicznych

Na podstawie wieloletnich badań wyszczególniono podstawowe postaci drgań kadłuba oraz tarczy łożyskowej. Dla lepszego zobrazowania powiązań pomiędzy poszczególnymi postaciami wibracyjnych odkształceń stojana oraz tarcz łożyskowych zestawione one zostały na jednym rysunku rys. 2.1. oraz oznaczone przedrostkiem  $s$  dla stojana oraz  $t$  dla tarczy łożyskowej.



Rys. 2.1. Rodzaje odkształceń dla stojana oraz tarczy łożyskowej: a) promieniowe stojana, b) obwodowe tarczy, c) wzdłużne stojana, d) osiowe tarczy

Można przyjąć, że naprężenia promieniowe oddziałują bezpośrednio na kadłub, a następnie poprzez zamek i łożysko przenoszą się na tarcze łożyskowe powodując ich osiowe drgania w ramach wyboczenia. Korpus stojana silnika jest znacznie mniej zwarty konstrukcyjnie niż sam wirnik. Dlatego to właśnie naprężenia przenoszone przez zamek tarczy mają największy wpływ na osiowe drgania tarczy łożyskowej, zaś wirnik wraz z łożyskiem tocznym redukuje drgania tarczy rzędu  $tn = 0$  poprzez spasowanie w kierunku osiowym. Odwrotna sytuacja będzie miała miejsce dla łożyska ślizgowego, które pozwala na większe możliwości ruchu. Przez to tłumienie drgań osiowych tarczy będzie mniej skuteczne.

Potwierdzeniem tego założenia będzie wykonanie pomiarów przy zastosowaniu łożyska ślizgowego, które ze względu na swoją konstrukcję nie ma możliwości ograniczenia drgań tarczy w kierunku osiowym. Dominującą postacią wibracyjnego odkształcenia tarcz, jak wskazują wyniki pomiarów (rozdział 4), jest postać osiowa rzędu  $tm = 0$ , obwodowa rzędu  $tn = 0$  oraz  $tn = 1$ . Odkształcenia stojana symetryczne względem



osi silnika niepowodujące przesunięcia geometrycznego środka stojana, skutkują obwodowym drganiem tarczy rzędu  $t_n = 0$ . Istotne są w tym przypadku odkształcenia promieniowe stojana rzędów  $s_n = 0, 2, 3, 4, \dots$ . Dla drgań trzęsących  $s_n = 1$  efektem będzie postać obwodowa drgań tarczy rzędu  $t_n = 1$ , ze względu na niesymetryczne drgania promieniowe stojana względem osi i okresowe przesunięcie geometryczne środka stojana. Zasada sprawdza się przy odkształceniach wzdłużnych stojana rzędu  $s_m = 1$ .

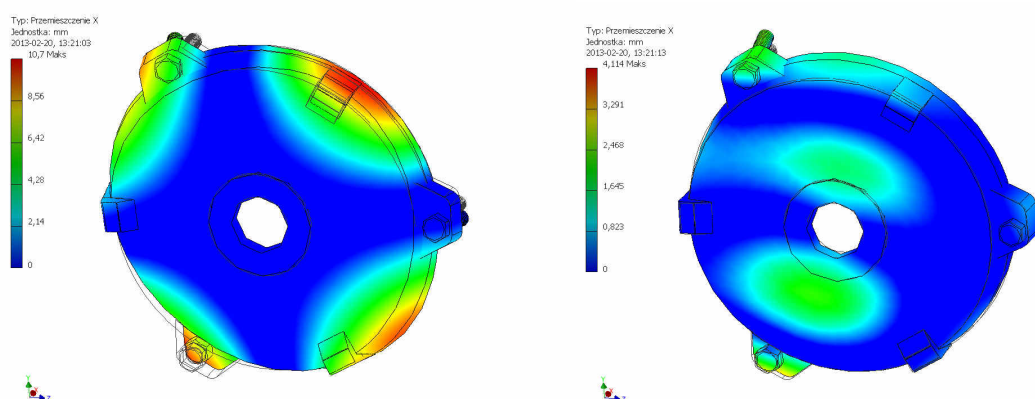
### 2.2. Analiza modalna metodą elementów skończonych

Najczęściej spotykaną i wykorzystywaną w analizie naprężeń w silnikach asynchronicznych jest metoda elementów skończonych MES (ang. FEM – Finite Element Method). Przy tak skomplikowanych strukturach metody analityczne nie pozwalają uzyskać dokładnych wyników [3]. W metodzie elementów skończonych obszar dzielony jest na skończoną liczbę tzw. elementów skończonych łączących się w węzłach. W zależności od wymiaru obszaru elementy skończone mają kształt odcinka (dla zagadnień jednowymiarowych), płaskich figur, najczęściej w postaci trójkątnych lub czworokątnych (dla zagadnień dwuwymiarowych) oraz brył przestrzennych w postaci czworościanów lub graniastosłupów (dla zagadnień trójwymiarowych). Dla każdego elementu skończonego poszukiwane funkcje będące rozwiązaniem zagadnienia brzegowo-początkowego są interpolowane za pomocą wartości węzłowych poszukiwanej funkcji rozwiązania oraz funkcji interpolacyjnych (tzw. funkcji kształtu).

Analizę modalną metodą elementów skończonych MES wykonano w ramach niniejszej rozprawy w programie Autodesk Inventor. Metoda wymaga wykonania modelu 3D poszczególnych elementów silnika. Metoda jest obecnie powszechnie wykorzystywana i sprawdzona w badaniach drgań modalnych [26]. Zamodelowano wał silnika, pakiet blach wirnika, klatkę wirnika, pakiet blach stojana, uzwojenie stojana, korpus stojana, tarcze łożyskowe oraz łożyska. Następnie dokonano złożenia wszystkich elementów składowych silnika w jedną całość uzyskując zarys modelu 4-biegunowego silnika asynchronicznego o mocy 2,2 kW. Kolejnym etapem jest przejście z modelem do środowiska analizy naprężeń, gdzie w pierwszym etapie jest przypisanie poszczególnym elementom właściwości materiałowych, czyli przypisanie danego materiału do danego elementu. Generalnie analizie modalnej można poddać poszczególne elementy składowe silnika oraz cały silnik w złożeniu.

### 2.2.1. Drgania własne tarczy

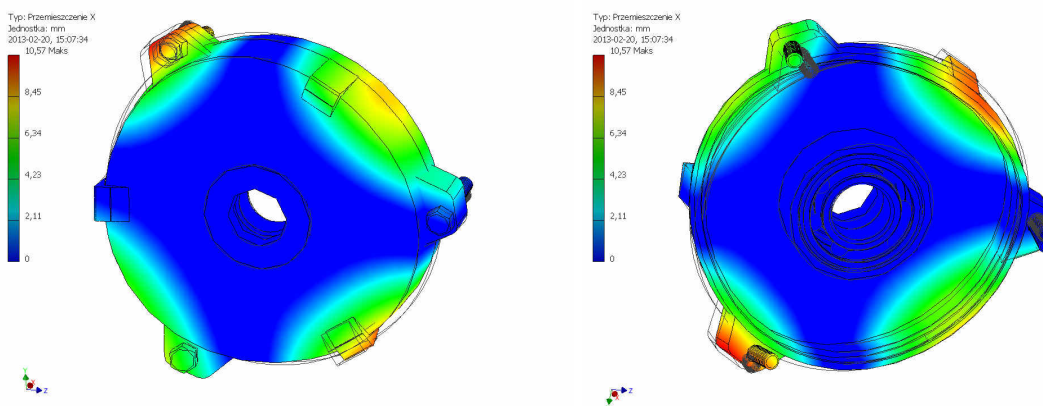
Wykonano model numeryczny tarczy łożyskowej. Przy modelowaniu drgań własnych tarczy dokonano analizy zarówno samej tarczy, jak i tarczy z zamocowanym sztywno łożyskiem tocznym. Zarówno tarcza jak i łożysko jest odzwierciedleniem elementów przebadanych w warunkach laboratoryjnych podczas testów, które opisano w kolejnych rozdziałach. Na drgania własne danego elementu wpływ ma wiele czynników, w tym rodzaj materiału, kształt elementu i jego masa. Rysunek 2.2. przedstawia wybrane postaci odkształceń dla częstotliwości modalnych samej tarczy łożyskowej w zakresie od 10 Hz do 5 kHz. Wraz ze wzrostem częstotliwości dla kolejnych postaci modalnych zmniejsza się rząd obwodowy drgań tarczy od rzędu  $t_n = 4$  do  $t_n = 2$ . Przy zasilaniu sieciowym silnika dominujące składowe widma drgań i hałasu dla tarczy łożyskowej znajdują się w zakresie do 2 kHz [17]. W zakresie do 2 kHz dla samej tarczy łożyskowej występuje tylko jedna postać obwodowa tarczy drgań własnych  $t_n = 4$ .



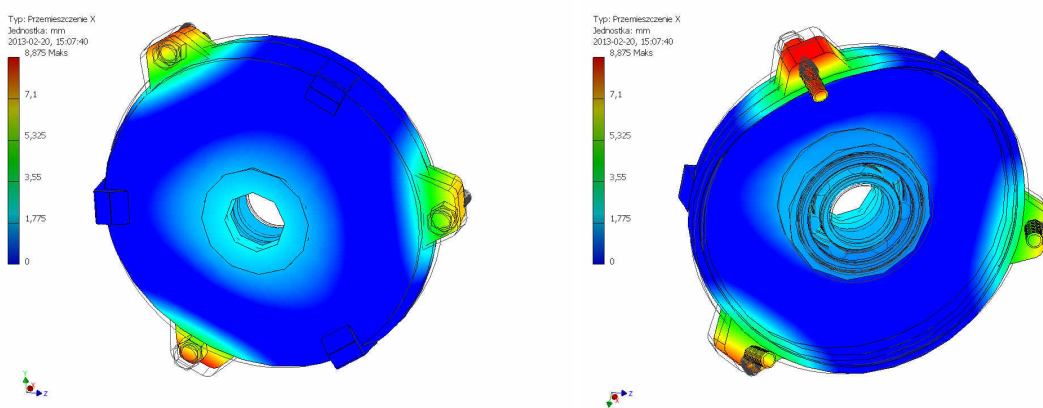
Rys. 2.2. Uzyskana z modelowania MES postać drgań własnych tarczy łożyskowej o częstotliwości 1306 Hz, rząd tarczy  $t_n=4$ ; 3770 Hz, rząd tarczy  $t_n=2$

Następnie dokonano podobnej analizy częstotliwości postaci modalnych dla tarczy łożyskowej ale już z zamocowanym łożyskiem. Dzięki temu można ocenić wpływ łożyska na drgania własne tarczy łożyskowej. Rysunki 2.3. do 2.5. przedstawiają kolejne częstotliwości modalne dla tarczy łożyskowej z zamontowanym łożyskiem w zakresie od 10 Hz do 5 kHz. Wraz ze wzrostem częstotliwości dla kolejnych postaci modalnych zmniejsza się, rząd obwodowy tarczy od rzędu  $t_n=4$  do  $t_n=2$ . W zakresie do 2 kHz dla samej tarczy łożyskowej występuje tylko jedna postać obwodowa tarczy drgań własnych  $t_n=4$ . Istotną zmianą, w porównaniu do postaci modalnych dla tarczy bez zamocowanego łożyska jest przesunięcie częstotliwości danej postaci drgań własnych. Postać obwodowa

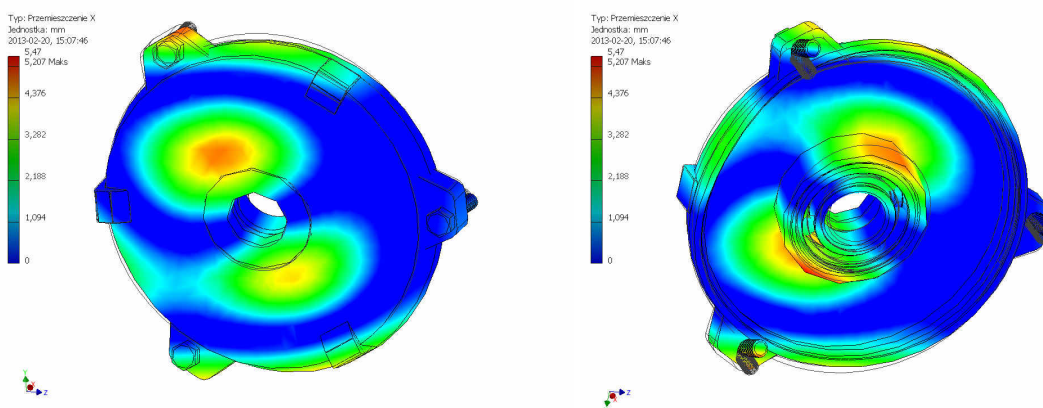
drgań tarczy  $t_n=4$ , która występowała dla tarczy bez łożyska przy częstotliwościach 1306 Hz oraz 1348 Hz, przy zamontowanym łożysku występuje przy częstotliwościach 1421 Hz oraz 1502 Hz.



Rys. 2.3. Uzyskana z modelowania MES postać drgań własnych tarczy łożyskowej z zamontowanym łożyskiem o częstotliwości 1421 Hz, rząd tarczy  $t_n=4$



Rys. 2.4. Uzyskana z modelowania MES postać drgań własnych tarczy łożyskowej z zamontowanym łożyskiem o częstotliwość 2178 Hz, rząd tarczy  $t_n=3$

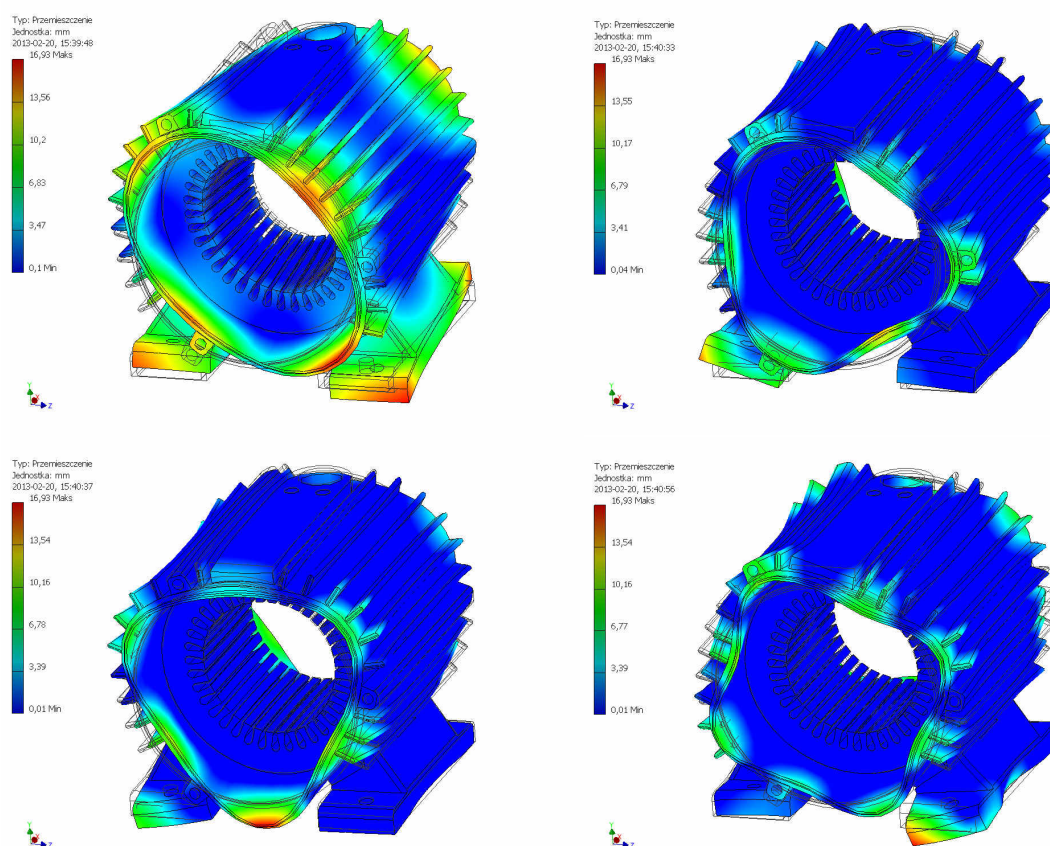


Rys. 2.5. Uzyskana z modelowania MES postać drgań własnych tarczy łożyskowej z zamontowanym łożyskiem o częstotliwości 3347 Hz, rząd tarczy  $t_n=2$

### 2.2.2. Drgania własne stojana

W kolejności wykonano model numeryczny kadłuba wraz ze stojanem. W celu jak najbardziej dokładnego odzwierciedlenia rzeczywistych warunków, przy modelowaniu analizowano zestaw w postaci pakietu stojana wraz z kadłubem badanego modelu. W przeciwieństwie do wyników analizy dla tarczy, obrazy stojana przedstawiają sumaryczne odkształcenia dla wszystkich osi współrzędnych a nie tylko prostopadłych do tarczy łożyskowej, ponieważ nawet odkształcenia promieniowe stojana poprzez zamek mogą powodować odkształcenia (wyboczenia) tarczy łożyskowej w kierunku osi silnika.

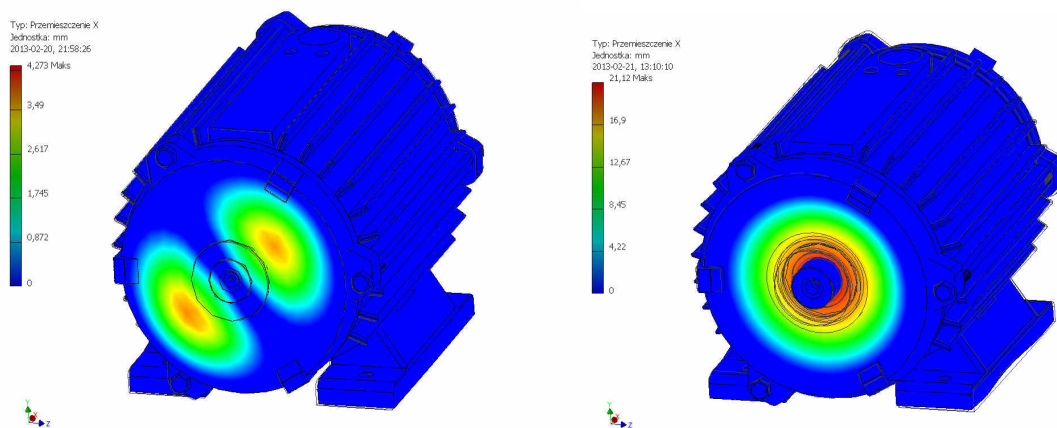
Rysunek 2.6 przedstawia wybrane postacie drgań stojana. Dominującą postacią wzdłużną stojana jest postać  $s_m=0$  i  $s_m=1$ . W badanym zakresie częstotliwości do 5 kHz postać promieniowa stojana zmienia się wraz ze wzrostem częstotliwości drgań własnych od postaci  $s_n=2$  poprzez postać rzędu trzeciego  $s_n=3$ , aż do postaci rzędu czwartego  $s_n=4$ .



Rys. 2.6. Uzyskana z modelowania MES postać drgań własnych stojana, częstotliwość 1677 Hz (rząd promieniowy  $s_n=2$ ); częstotliwość 3423,5 Hz (rząd promieniowy  $s_n=3$ ); częstotliwość 3615,3 Hz (rząd promieniowy  $s_n=3$ ); częstotliwość 4778 Hz (rząd promieniowy  $s_n=4$ );

### 2.2.3. Drgania własne kompletnego silnika

W kolejności wykonano model numeryczny kompletnego silnika. Wyniki analizy wskazują, że uzyskane postaci drgań są zupełnie inne niż w przypadku samej tarczy lub samego kadłuba. Utwierdza to w przekonaniu, że w celu późniejszej identyfikacji składowych widma drgań konieczne jest dokładne przeanalizowanie możliwych częstotliwości modalnych dla całej badanej konstrukcji, zarówno dla poszczególnych elementów składowych jak i całego złożenia konstrukcyjnego badanego silnika. Analizy modalnej dokonano dla silnika z łożyskiem tocznym oraz ślizgowym. Przykładowe postaci modalne zobrazowane zostały na rysunku rys. 2.7 z zakresu od 10 Hz do 5 kHz. Obserwując postaci drgań własnych kompletnego silnika można zauważyć, że są one różne w zależności od zastosowanego łożyska, różnią się między sobą głównymi częstotliwościami jak i samymi postaciami drgań. Spowodowane jest to między innymi różną masą poszczególnych łożysk jak i różną sztywnością w kierunku wzdłużnym i poprzecznym dla łożyska tocznego i ślizgowego.



Rys. 2.7. Uzyskana z modelowania MES postać drgań własnych silnika z łożyskami tocznymi, częstotliwość 1343 Hz (rząd obwodowy  $t_n=1$ ); oraz z łożyskiem ślizgowym częstotliwość 2000 Hz (rząd obwodowy  $t_n=0$ )



### 3. METODYKA POMIAROWYCH ANALIZ POSTACI DRGAŃ TARCZ ŁOŻYSKOWYCH

#### 3.1. Eksploatacyjne postacie drgań

Eksploatacyjne postacie drgań lub mniej poprawnie „eksploatacyjne postacie odkształceń” ODS (ang. Operational Deflection Shapes) służą do zobrazowania postaci wibracyjnych odkształceń struktury w warunkach normalnej pracy maszyny. W przeciwieństwie do analizy modalnej, nie analizuje się tylko drgań własnych struktury ale wszelkie drgania powierzchni wynikające z pobudzenia siłą zewnętrzną oraz wynikające z naturalnego tłumienia układu. Obrazy uzyskuje się poprzez pomiary ruchu struktury w dwóch lub więcej punktach [21]. Eksploatacyjne postacie drgań są o tyle bardziej użyteczne z punktu widzenia użytkowego, gdyż są dobrze skorelowane z widmem hałasu maszyny i dotyczy to zarówno fal stojących jak i wędrujących [25]. Kolejną ważną zaletą jest możliwość uzyskania animowanych obrazów postaci drgań dla istotnych składowych częstotliwości z całościowego widma częstotliwościowego drgań badanej powierzchni. Dla danej częstotliwości  $\omega_0$  równanie wymuszonej odpowiedzi w postaci eksploatacyjnego odkształcenia struktury przedstawia zależność:

$$\{ODS(j\omega_0)\} = [H(j\omega_0)]\{F(j\omega_0)\} \quad (3.1)$$

gdzie:  $[H(j\omega)]$  - macierz funkcji odpowiedzi częstotliwościowej FRF struktury,

$\{F(j\omega)\}$  - wektor dyskretnej transformaty Fouriera sił zewnętrznych,

Przy czym, po wykonaniu odwrotnej transformaty Fouriera obu stron równania (3.1), otrzymuje się postać odkształceń struktury w dziedzinie czasu:

$$\{ODS(t)\} = F^{-1}\{[H(j\omega_0)]\{F(j\omega_0)\}\} \quad (3.2)$$

Równania (3.1) i (3.2) stanowią definicję eksploatacyjnych postaci drgań ODS w dziedzinie częstotliwości i czasu [21]. Za pomocą tej metody uzyskuje się periodyczne przebiegi odkształceń opisujące ruchy struktury dla danej częstotliwości. Niedogodnością jest uzyskiwanie tylko względnych amplitud oraz fazy pomiędzy sygnałami różnych punktów pomiarowych.

Dla wyznaczenia eksploatacyjnych postaci drgań stosuje się dwie podstawowe metody pomiarowe MORO (ang. Multiple-Output Reference-Output) i RORO (ang. Roving-Output Reference-Output). Metoda MORO jest metodą polegającą na wykorzystaniu jednego czujnika odniesienia oraz wielu czujników pomiarowych. Metoda ta pozwala na dokonanie szybkich pomiarów ale wymaga dość kosztownych wielokanałowych systemów akwizycji danych. Druga metoda RORO wykorzystuje jedynie dwa czujniki, jeden czujnik jest czujnikiem odniesienia a drugi czujnik to przemieszczany ("wędrujący") czujnik pomiarowy. Metoda ta jest znacznie tańsza ale bardziej pracochłonna, ponieważ wymaga wykonania wielu pomiarów przy zapewnionych stałych warunkach dla kolejnych pomiarów. Dla maszyn elektrycznych metoda RORO jest właściwa przy ustalonych warunkach pracy. Dzięki zastosowaniu czujnika odniesienia system akwizycji danych uzyskuje względną fazę dwóch sygnałów, dzięki czemu nie jest konieczne zsynchronizowanie wyzwalania kolejnych rejestracji.

W związku z opisanymi problemami tradycyjnej metody ODS wyznacza się specjalnie zdefiniowaną funkcję przejścia ODS FRF [21]. Dzięki czemu uzyskuje się wyskalowane eksploatacyjne postaci drgań. Jako metodę pomiarową stosuje się te same metody jak dla tradycyjnych badaniach postaci drgań, metodę MORO jednego czujnika odniesienia lub metodę RORO. Przy wykonywaniu pomiarów dwóch sygnałów jednocześnie można wyznaczyć ich przesunięcie fazowe. Metodyka obliczeń opracowana została dla pomiarów za pomocą analizatora dwukanałowego [13]. Mimo, iż metoda ODS FRF wzmiankowana była już w 1997 roku przez Richardsona [21], to poprawny jej zapis w literaturze pojawił się dopiero w 2003 roku – Karkosiński [11] i w 2004 rok – Schwartz, Richardson [21]:

$$\{ODSFRF(j\omega)\} = \frac{G_{r,x}(j\omega) * \sqrt{G_{x,x}(j\omega)}}{|G_{r,x}(j\omega)|} \quad (3.3)$$

gdzie:  $G_{r,x}(j\omega)$  - uśrednione wzajemne widmo mocy pomiędzy sygnałem odniesienia a sygnałem odpowiedzi w punkcie x,

$G_{x,x}(j\omega)$  - uśrednione własne widmo mocy sygnału odpowiedzi w punkcie x.

Analizę eksploatacyjnych postaci odkształceń wykonuje się operując na widmach. Zgodnie ze wzorem (3.3) potrzebne jest wzajemne widmo mocy, które zawiera informację

o fazie oraz widmo własne odpowiedzi w danym punkcie pomiarowym, które zawiera informację o amplitudzie dla danego punktu pomiarowego.

Pomiarowa analiza drgań tarcz łożyskowych w warunkach normalnej pracy maszyny prowadzi do uzyskania eksploatacyjnych postaci drgań oraz widma drgań powierzchni tarczy łożyskowej. Zarówno pomiary przy użyciu akcelerometrów, czy też nowocześniejsze pomiary bezdotykowe z wykorzystaniem lasera, poprzez funkcję ODS FRF pozwalają uzyskać wysokiej dokładności wyniki dla eksploatacyjnych postaci drgań.

### 3.2. Metody badań przy pomocy dopplerowskiego lasera skanującego

Dopplerowski laser skanujący SLDV działa w oparciu o zjawisko zmiany częstotliwości dla fali świetlnej emitowanej z obiektu przybliżającego się lub oddalającego się od obserwatora. Efekt zmiany częstotliwości dla światła nazywany jest relatywistycznym efektem Dopplera. Jeżeli obserwator i nadajnik fali świetlnej poruszają się wzdłuż jednej prostej i oddalają się od siebie, to odbiornik rejestruje falę o częstotliwości:

$$f_0 = \gamma(1 - \beta)f_z = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}f_z \quad (3.5)$$

gdzie:  $\beta = \frac{v}{c}$ ,

$c$  - prędkość światła w próżni,

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  - czynnik Lorentza.

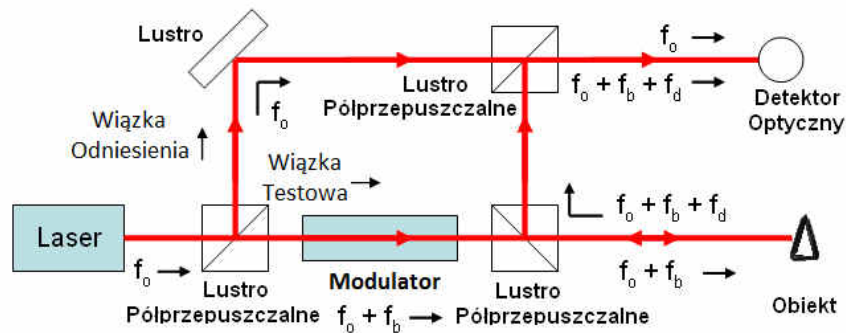
Przy prędkościach znacznie mniejszych od prędkości światła wzór ulega uproszczeniu, gdy źródło oddala się od obserwatora:

$$f_0 \approx f_z \frac{c - v}{c} \approx f_z \frac{c}{c + v} \quad (3.6)$$

Schemat działania Lasera dopplerowskiego przedstawia rysunek (rys. 3.1). W laserze tego typu wiązka referencyjna (odniesienia) trafia na detektor optyczny razem z wiązką testową odbitą od obiektu badanego. Dzięki temu możliwe są jednoczesne pomiary dwóch sygnałów.



Metoda ta obecnie jest najlepszą z dostępnych, ponieważ oferuje wysoką dokładność pomiaru w bardzo krótkim czasie w porównaniu do akcelerometrów, a co ważniejsze pozwala na pomiary w pełni bezdotykowe. Wymienione cechy umożliwiają szybkie pomiary nie tylko w warunkach laboratoryjnych ale również na pracujących obiektach.



Rys. 3.1. Schemat działania lasera dopplerowskiego

W zakresie wyznaczania eksploatacyjnych postaci odkształceń wibracyjnych, najlepsze wyniki dają wyskalowane postacie odkształceń przy użyciu funkcji przejścia ODS FRF. Pomiary przy pomocy lasera skanującego są wykonywane jednocześnie dla wszystkich punktów podczas ustalonych warunków pracy maszyny. Skaner dokonuje pomiarów prędkości drgań powierzchni w wyznaczonych punktach pomiarowych synchronizując się na podstawie wewnętrznego zegara służącego lub na podstawie sygnału referencyjnego uzyskiwanego z powierzchni mierzonej. Ponieważ referencja jest potrzebna tylko do uzyskania fazy a amplituda jest uzyskiwana z pomiaru, można przyjąć, że jest to metoda zbieżna z metodą ODSFRF, którą można zdefiniować wprost [28]:

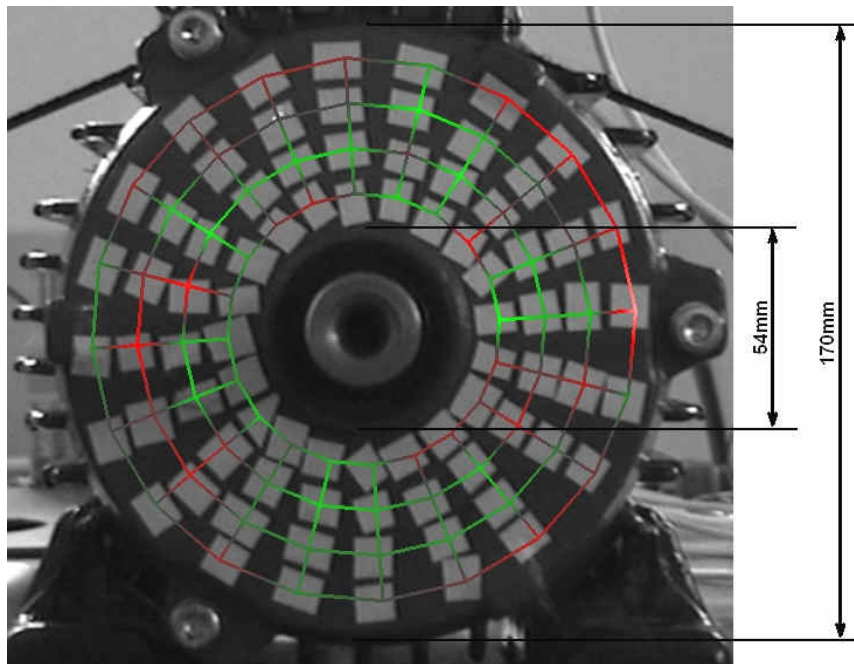
$$\mathbf{ODSFRF}_i = |X_i| e^{j\omega(\phi_i - \phi_r)} \quad (3.7)$$

gdzie:  $|X_i|$  - amplituda sygnału odpowiedzi w punkcie pomiarowym

$e^{j\omega(\phi_i - \phi_r)}$  – przesunięcie fazowe pomiędzy sygnałem odpowiedzi w punkcie pomiarowym i sygnałem referencyjnym.

#### 4. BADANIA DRGAŃ TARCZY ŁOŻYSKOWEJ PODCZAS PRACY SILNIKA

Przedmiotem badań drgań był asynchroniczny silnik klatkowy o mocy 2,2 kW, dwóch parach biegunów, zasilany z sieci o częstotliwości 50 Hz, pracujący na biegu jałowym. Silnik posiadał standardowe tarcze żeliwne. Do badań użyto sprzętu firmy Polytec w konfiguracji głowica skanująca PSV-I-400 z kasetą przyłączeniową PSV-E-400, kontroler OFV-5000, komputer PSV-W-400 oraz użyto oprogramowania Polytec Scanning Vibrometer version 8.5. Badania drgań tarczy łożyskowej wykonano w zakresie częstotliwości od 0 - 20 kHz. Podczas pomiarów jednorazowo laser skanuje powierzchnię tylko w jednym punkcie i następnie dokonuje pomiaru w kolejnym punkcie i tak dla całej siatki. Z tego powodu przy wykorzystaniu programu narzędziowego wyznacza się siatkę pomiarową na badanej powierzchni tarczy. Dla uzyskania rzeczywistego odzwierciedlenia jakościowego i ilościowego drgań powierzchni tarczy wyznaczono siatkę pomiarową złożoną z 80 punktów pomiarowych (rys. 4.1) rozmieszczonych na okręgach z taką samą liczbą na każdym okręgu. Jako czujnika referencyjnego użyto akcelerometru typu 4508 – 99 mV/g firmy Bruel&Kjaer.



Rys. 4.1. Widok siatki pomiarowej złożonej z 80 punktów pomiarowych na tarczy łożyskowej badanego silnika o mocy 2,2 kW

Czujnik referencyjny był niezbędny tylko do synchronizacji w fazie. Jest to duże uproszczenie techniki pomiarowej w porównaniu do tradycyjnych metod wymagających dużej ilości obliczeń i wyznaczania wzajemnych widm mocy pomiędzy sygnałem zmierzonym oraz widm własnych mocy sygnału zmierzonego.

#### 4.1. Analiza widm drgań tarczy łożyskowej

W pierwszym kroku badań wyznaczono główne składowe częstotliwościowe drgań. Na podstawie widma uśrednionego dla całej tarczy ustalono, że główne częstotliwości z widma drgań tarczy mieszczą się w zakresie do 1 kHz.

Drgania tarcz łożyskowych małych silników asynchronicznych mogą mieć związek z szerokopasmowymi naprężeniami promieniowymi będącymi wynikiem oddziaływań reluktancyjnych. Przy zasilaniu sieciowym największą amplitudę uzyskuje składowa wywołana główną falą pola [12, 30, 32]. Zapis fal promieniowych (kwadratu indukcji), które są odpowiedzialne za naprężenia reluktancyjne, przedstawiono za pomocą wzoru (4.1) [16].

$$\begin{aligned}
 b^2(\theta, t) = & 0,5B_p^2 \cos(2p\theta - 2\omega_1 t - 2\varphi_0) + 0,5 \sum_v B_v \cos(2v\theta - 2\omega_v t - 2\varphi_v) \\
 & + 0,5 \sum_\mu B_\mu \cos(2\mu\theta - 2\omega_\mu t - 2\varphi_\mu) \\
 & + \sum_{v_1} \sum_{v_2} B_{v_1} B_{v_2} \cos[(v_1 + v_2)\theta - (\omega_{v_1} + \omega_{v_2})t - (\varphi_{v_1} + \varphi_{v_2})] \\
 & + \sum_{v_1} \sum_{v_2} B_{v_1} B_{v_2} \cos[(v_1 - v_2)\theta - (\omega_{v_1} - \omega_{v_2})t - (\varphi_{v_1} - \varphi_{v_2})] \\
 & + \sum_{\mu_1} \sum_{\mu_2} B_{\mu_1} B_{\mu_2} \cos[(\mu_1 + \mu_2)\theta - (\omega_{\mu_1} + \omega_{\mu_2})t - (\varphi_{\mu_1} + \varphi_{\mu_2})] \\
 & + \sum_{\mu_1} \sum_{\mu_2} B_{\mu_1} B_{\mu_2} \cos[(\mu_1 - \mu_2)\theta - (\omega_{\mu_1} - \omega_{\mu_2})t - (\varphi_{\mu_1} - \varphi_{\mu_2})] \\
 & + \sum_v \sum_\mu B_v B_\mu \cos[(v + \mu)\theta - (\omega_v + \omega_\mu)t - (\varphi_v + \varphi_\mu)] \\
 & + \sum_v \sum_\mu B_v B_\mu \cos[(v - \mu)\theta - (\omega_v - \omega_\mu)t - (\varphi_v - \varphi_\mu)]
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

gdzie:  $B_v$  - amplituda harmonicznej pola stojana,

$B_\mu$  - amplituda harmonicznej pola wirnika,

$\nu$  - liczba par biegunów wyższej harmonicznej pola stojana, współczynnik Poissona,

$\mu$  - liczba par biegunów wyższej harmonicznej pola wirnika,

$\omega_\nu, \omega_\mu$  - częstość harmonicznej pola wirnika i stojana,

$\varphi_\nu, \varphi_\mu$  - kąt przesunięcia fazowego harmonicznej stojana i wirnika.

Częstotliwości głównych składowych tych naprężeń opisują się za pomocą następujących wzorów [10, 12]:

$$f = f_1 \left[ \frac{g_2 Z_2}{p} (1-s) \right] \quad (4.2)$$

$$f = f_1 \left[ \frac{g_2 Z_2}{p} (1-s) + 2 \right] \quad (4.3)$$

$$f = f_1 \left[ \frac{g_2 Z_2}{p} (1-s) + 4 \right] \quad (4.4)$$

$$f = f_1 \left[ \frac{g_2 Z_2}{p} (1-s) + 6 \right] \quad (4.5)$$

$$f = f_1 \left[ (g_2 Z_2 \pm 1) \frac{1-s}{p} \right] \quad (4.6)$$

$$f = f_1 \left[ (g_2 Z_2 \pm 1) \frac{1-s}{p} + 2 \right] \quad (4.7)$$

$$f = f_1 \left[ (g_2 Z_2 \pm 1) \frac{1-s}{p} + 4 \right] \quad (4.8)$$

$$f = f_1 \left[ (g_2 Z_2 \pm 1) \frac{1-s}{p} + 6 \right] \quad (4.9)$$

gdzie:  $g_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ,

$f_1$  - częstość zasilania,

$Z_2$  - ilość żłobków wirnika,

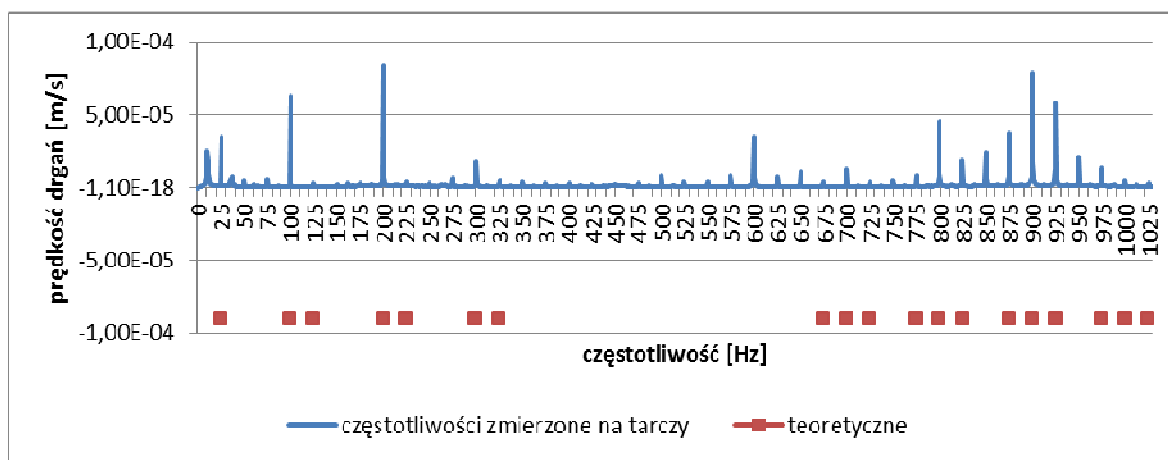
$s$  - poślizg silnika asynchronicznego,

$p$  - liczba par biegunów silnika.

Przy biegu jałowym silnika asynchronicznego poślizg jest bliski zeru - silnik pracuje z częstotliwością niemal równą częstotliwości synchronicznej. Dla takiego przypadku przy zasilaniu sieciowym dla rozpatrywanego silnika o dwóch parach biegunów i liczbie żłobków wirnika  $Z_2=28$  otrzymano następujące składowe częstotliwościowe:

$f = 25, 100, 125, 200, 225, 300, 325, 675, 700, 725, 775, 800, 825, 900, 925, 975, 1000, 1025, 1375, 1400, 1425, 1475, 1500, 1525, 1575, 1600, 1625, 1675, 1700, 1725$  Hz...

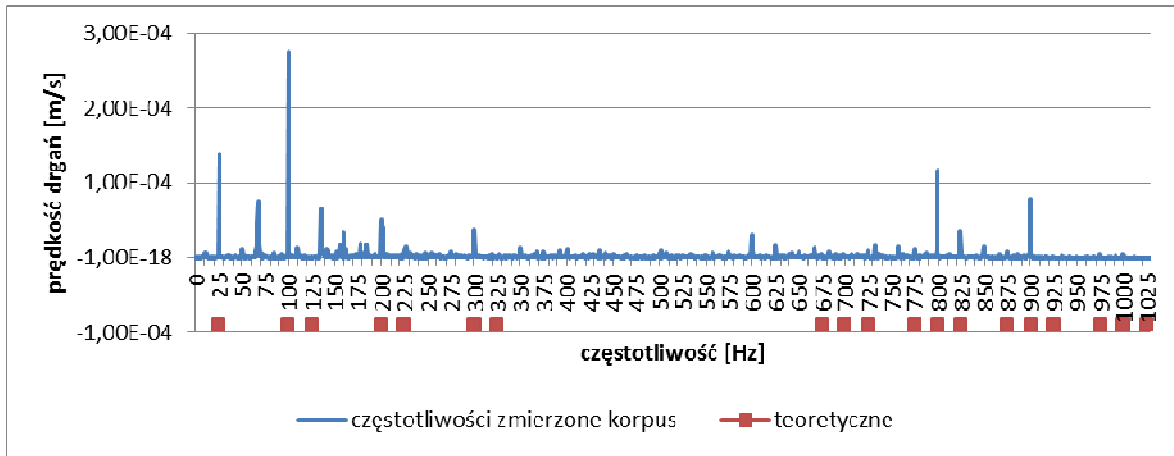
Pierwszą weryfikację domniemanych przyczyn drgań tarczy przeprowadzono poprzez zestawienie składowych częstotliwościowych wyznaczonych ze wzorów (4.2 – 4.9) dla promieniowych wymuszeń reluktancyjnych stojana z dominującymi składowymi osiowymi tarczy wyznaczonymi z pomiarów dla punktów umiejscowionych na okręgu w połowie promienia tarczy. Zestawienie dla łożysk tocznych przedstawiono na rys. 4.2. Można zauważyć zbieżność częstotliwości jedenastu, czyli większości, zmierzonych składowych widma drgań ze składowymi wymuszeń częstotliwość wymuszeń reluktancyjnych dla niskich rzędów  $g_2 = 0$  i 1. Jedynie częstotliwość 600 Hz nie występuje w wymuszeniach reluktancyjnych.



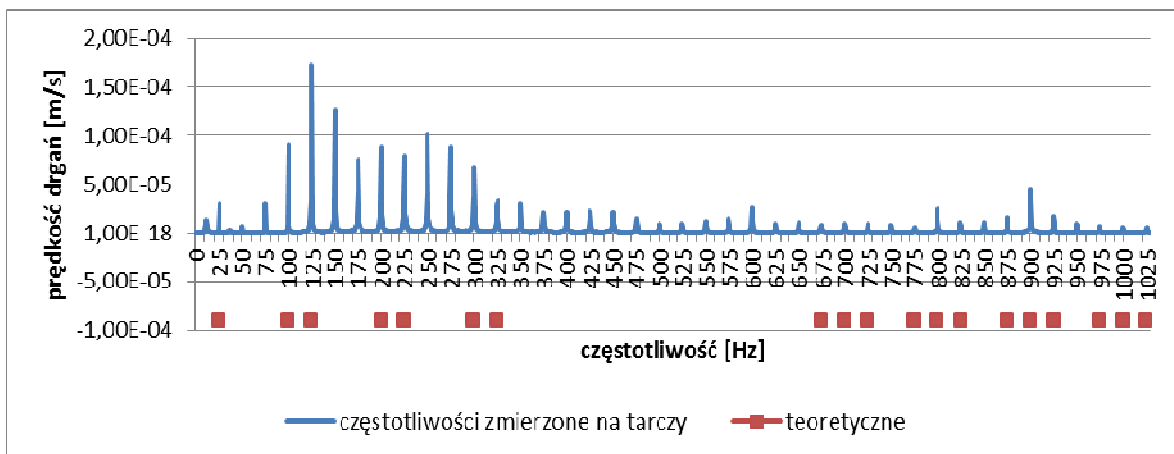
Rys. 4.2. Widmo drgań tarczy łożyskowej wyznaczone z pomiarów dla łożyska tocznego i składowe częstotliwościowe wymuszeń reluktancyjnych promieniowych stojana wyznaczone przy pomocy obliczeń wg (4.2 – 4.9)

Kolejną weryfikację domniemanych przyczyn drgań tarczy przeprowadzono poprzez zestawienie składowych częstotliwościowych wyznaczonych ze wzorów (4.2 – 4.9) dla promieniowych wymuszeń reluktancyjnych stojana z dominującymi składowymi osiowymi wyznaczonymi z pomiarów dla krawędzi kadłuba przy zamku - rys. 4.3. W tym

przypadku zbieżność występuje dla siedmiu dominant: 25 Hz, 100Hz, 200 Hz, 300 Hz, 800 Hz, 825 Hz i 900 Hz.



Rys. 4.3. Widmo częstotliwościowe osiowych drgań korpusu stojana wyznaczone z pomiarów w pobliżu zamku z tarczą i składowe częstotliwościowe wymuszeń reluktancyjnych promieniowych stojana wyznaczone z obliczeń wg (4.2 – 4.9)

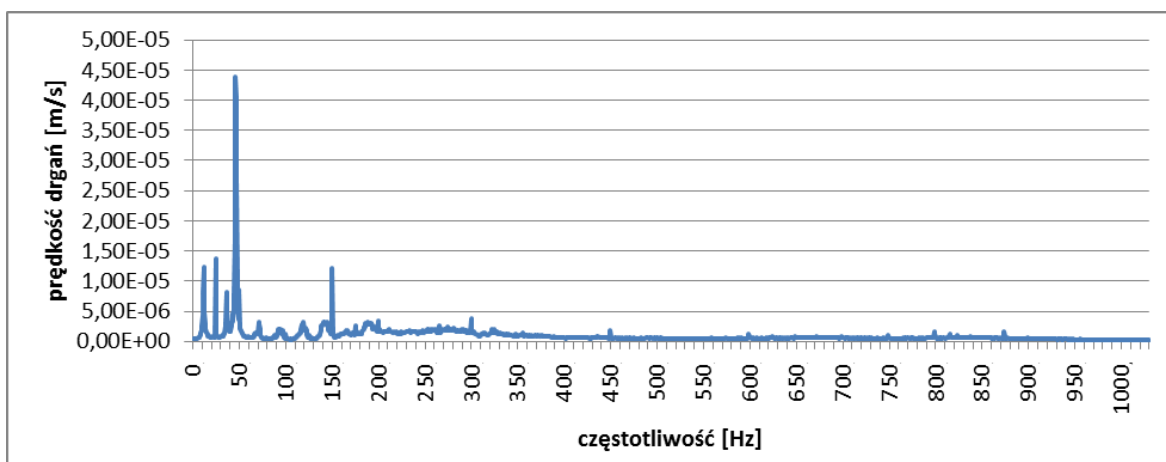


Rys. 4.4. Widmo częstotliwościowe drgań tarczy łożyskowej wyznaczone z pomiarów dla łożyska ślizgowego i składowe częstotliwościowe wymuszeń reluktancyjnych promieniowych stojana wyznaczone z obliczeń wg (4.2 – 4.9)

Weryfikacje zbieżności wyznaczonych z pomiarów składowych widma drgań ze składowymi wymuszeń reluktancyjnych stojana wg (4.2 – 4.9) powtórzono po wymianie łożysk tocznych na specjalnie wykonane łożyska ślizgowe. Z rysunku 4.4 w porównaniu do rys. 4.2 wynika zdecydowanie większa liczba dominant, która świadczy o niższym tłumieniu drgań tarczy przez łożysko ślizgowe. Praktycznie wszystkie składowe wymuszeń reluktancyjnych o częstotliwościach obliczonych wg (4.2 – 4.9) mają swoje

odzwierciedlenie w składowych widma drgań tarczy. Ponadto występuje znaczna liczba składowych widma niemających związku z wymuszeniami obliczonymi dla niskich rzędów  $g_2 = 0$  i 1 wg (4.2 – 4.9)

Dla potwierdzenia związku drgań tarczy łożyskowej z wymuszeniami pochodzenia elektromagnetycznego stojana powtórzono badania w warunkach obniżonej amplitudy indukcji w szczeliny powietrznej silnika. W tym celu silnik był zasilony napięciem obniżonym do wartości 110 V (50 Hz), tj. wartości, przy której prędkość biegu jałowego jest jeszcze analogiczna jak przy zasilaniu znamionowym. Obniżenie napięcia uzyskano poprzez zastosowanie falownika typu SMD firmy Lenze. Aby zminimalizować wpływ wyższych harmonicznych, częstotliwość kluczowania tranzystorów ustawiono na 10 kHz. Prawie czterokrotne obniżenie napięcia powinno skutkować blisko 16-krotnym obniżeniem amplitudy składowych wymuszenia reluktancyjnego stojana. Uzyskane widmo drgań przedstawiono na rys. 4.5. Porównując widmo z rys. 4.5 oraz rys. 4.2 można zauważyć znaczne obniżenie amplitudy prędkości drgań. Pojawiła się składowa o częstotliwości 50 Hz i jej wielokrotności, która przy zasilaniu sieciowym nie występuje.



Rys. 4.5. Widmo częstotliwościowe uśrednione tarczy łożyskowej dla łożyska tocznego przy obniżonym napięciu 110 V

Natomiast, zgodnie z oczekiwaniem, składowa o częstotliwości 100 Hz będąca wynikiem pola głównego w szczeliny, prawie zanikła. Ponadto większość składowych przestała być mierzalna. Wykonany eksperyment potwierdził wstępne założenia o dominujących przyczynach drgań tarczy łożyskowej w wyniku działania sił elektromagnetycznych.

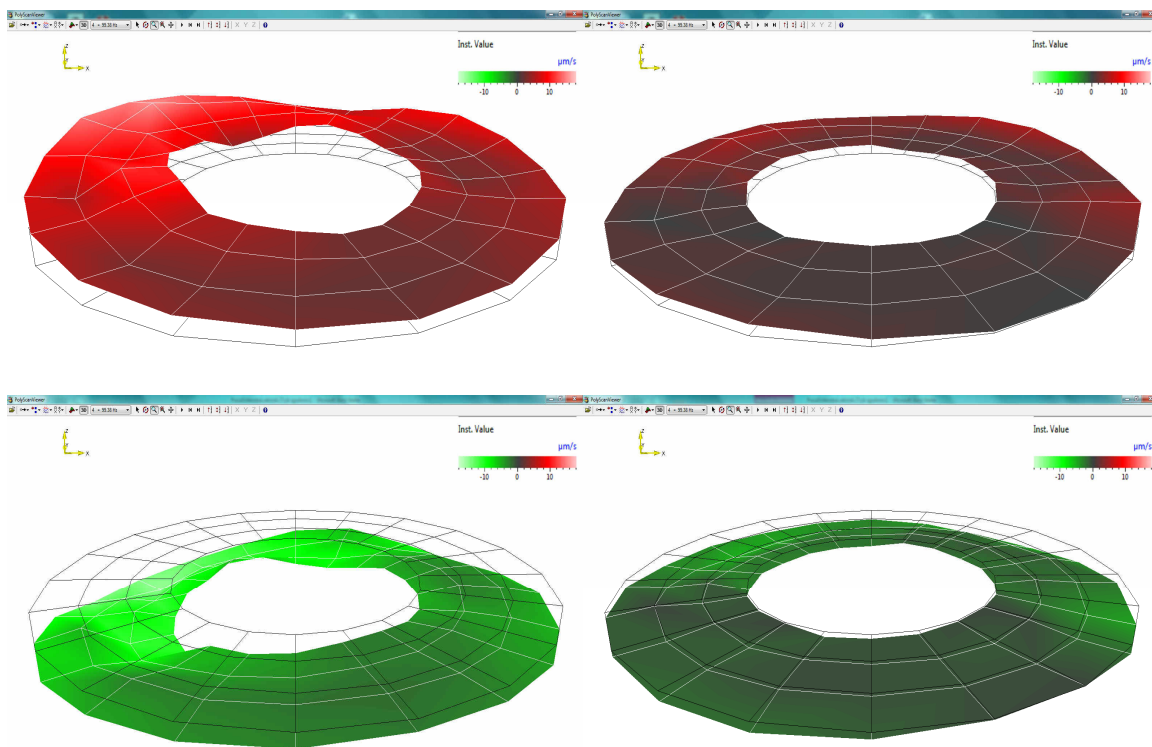
Przy łożysku tocznym drgania tarczy są tłumione poprzez łożyska i wał wirnika w granicach sił poosiowego tarcia w węzłach łożyskowych, które zależy od zastosowanego pasowania. Oczywiście skuteczność tego tłumienia zależy od luzów poosiowych łożyska i węzłów łożyskowych. Przy biegu jałowym maszyny główną siłą obciążenia poprzecznego łożysk jest ciężar wirnika, siła odśrodkowa i siła jednostronnego naciągu magnetycznego. Siła jednostronnego naciągu magnetycznego maleje z kwadratem napięcia zasilania. W skrajnych przypadkach zmniejszenie poprzecznego obciążenia zużytego łożyska kulkowego może paradoksalnie zwiększyć jego luz poosiowy.

### 4.2. Analiza postaci drgań tarczy łożyskowej

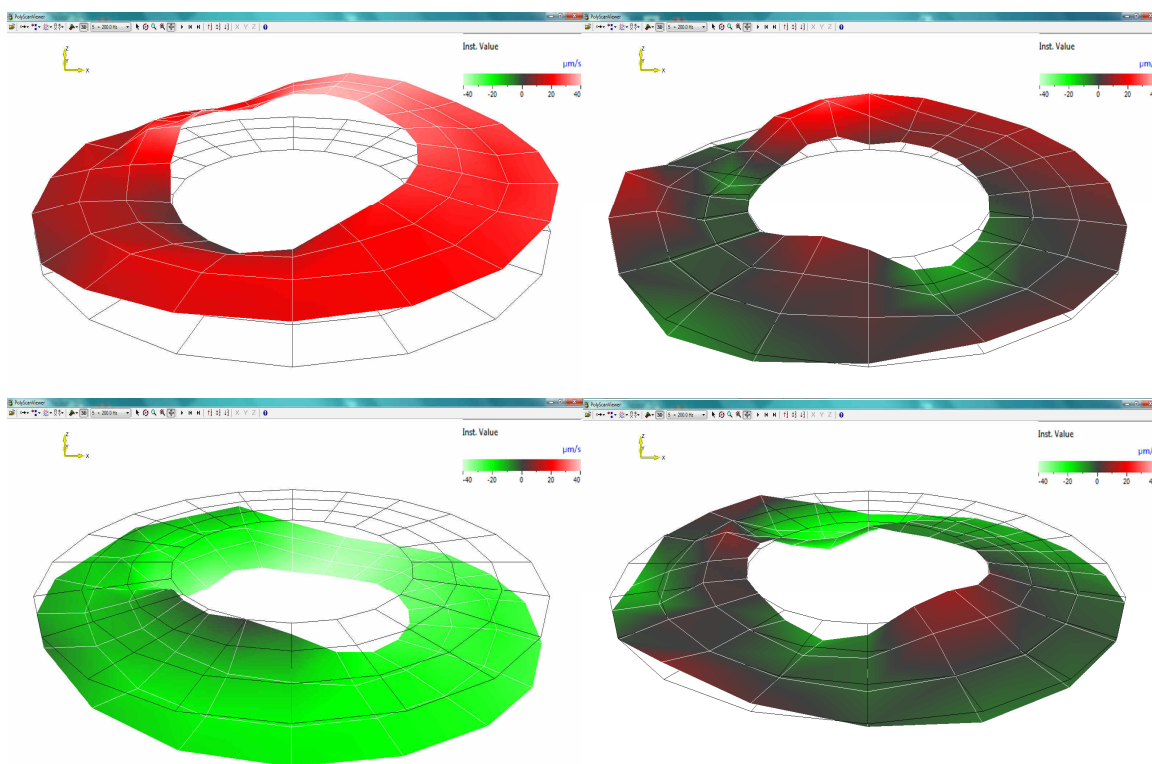
Na rysunkach 4.6 do 4.9 przedstawiono uzyskane z pomiarów laserem skanującym postaci drgań dla dominujących składowych przy łożyskach tocznych, a na rys. 4.10 - 4.12 z łożyskiem ślizgowym. Na podstawie klasyfikacji wg rys. 2.1. można określić, że dominującymi postaciami drgań tarczy łożyskowej są postacie obwodowe  $tn=0$  i 1. Otrzymane postacie drgań można podzielić na dwie grupy ze względu na ich charakter. Jedną to wirujące odkształcenia osiowe tarczy spowodowane wirującym odkształceniem kadłuba, które najczęściej przyjmują postać tarczy rzędu pierwszego  $tn=1$ . Przypadek taki widać na rysunku 4.8 dla składowej 800 Hz. Podobną postać odkształcenia uzyskano dla składowej 900 Hz (rys. 4.9), gdzie jednak postać ma charakter nie wirujący, lecz pulsacyjny. W celu rozpoznania wirującej lub pulsacyjnej postaci obserwowano animacje dla danej składowej, które zobrazowano na rysunkach za pomocą postaci drgań dla czterech kątów fazowych.

Wszędzie tam, gdzie rząd postaci drgań stojana jest różny od rzędu pierwszego, niezależnie od postaci wzdłużnej stojana, otrzymano postać drgającą tarczy łożyskowej o obwodowym rzędzie  $tn=0$  oraz promieniowym  $tm=0$ . Taki przypadek występuje dla składowej o częstotliwości 100 Hz (rys. 4.12) oraz 200 Hz (rys. 4.7).



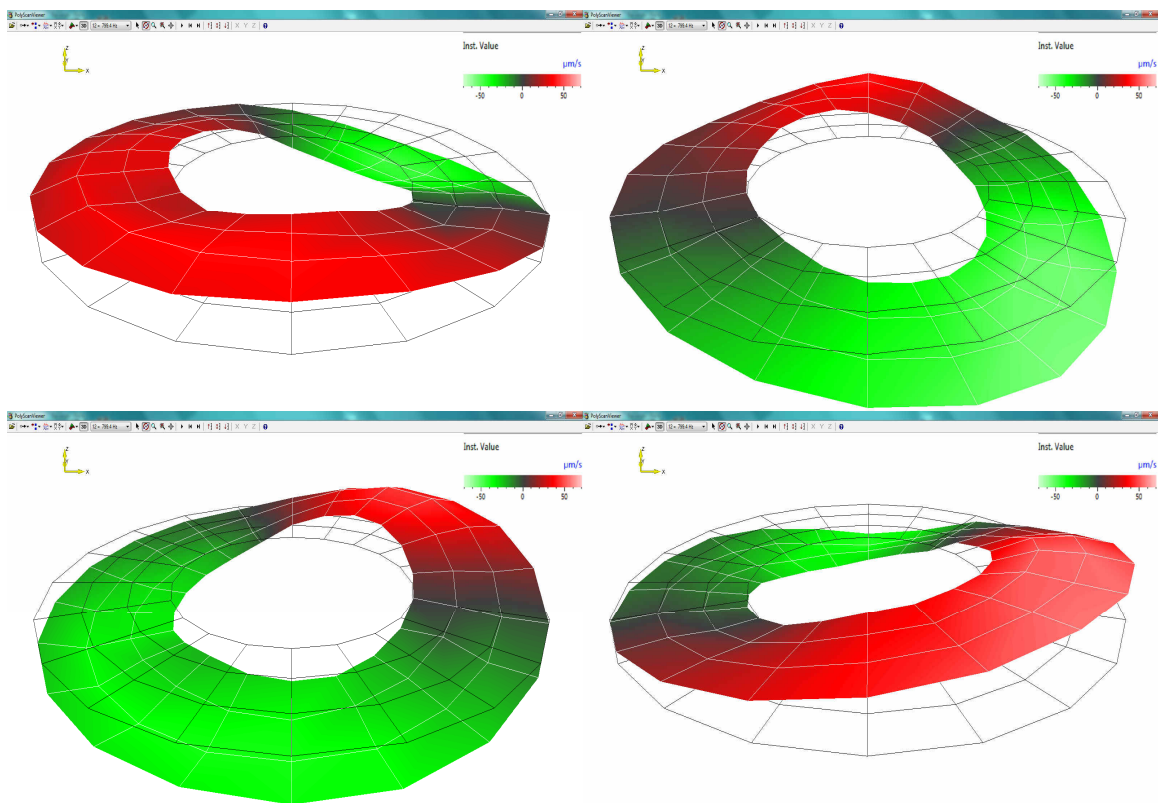


Rys. 4.6. Postać drgań tarczy łożyskowej z łożyskiem tocznym dla silnika o mocy 2,2 kW i  $2p=4$ , składowa 99,38 Hz dla fazy drgań w kolejności 0, 90, 180 oraz 270°, skala prędkości drgań od -18µm/s do +18 µm/s



Rys. 4.7. Postać drgań tarczy łożyskowej z łożyskiem tocznym dla silnika o mocy 2,2 kW i  $2p=4$ , składowa 200 Hz dla fazy drgań w kolejności 0, 90, 180 oraz 270°, skala prędkości drgań od -40µm/s do +40µm/s

Wyniki pomiarów przy zainstalowanych łożyskach ślizgowych (rys. 4.10 - 6.12) potwierdzają niższe właściwości tłumiące łożyska dla drgań tarczy rzędu  $tn=0$  oraz wyższe dla drgań rzędu  $tn=1$ . Charakterystyczne jest także, że dla częstotliwości poniżej 500 Hz główne postacie drgań tarczy łożyskowej są rzędu  $tn=0$ , natomiast powyżej 500 Hz dominujący jest rząd  $tn=1$ . Potwierdzają to widma na rys. 4.2 i 4.4, gdzie znacznie więcej składowych występuje dla łożyska ślizgowego i częstotliwości poniżej 500 Hz, a dla łożyska tocznego powyżej tej wartości, która odpowiada również za zmianę dominującej postaci odkształcenia promieniowego tarczy.

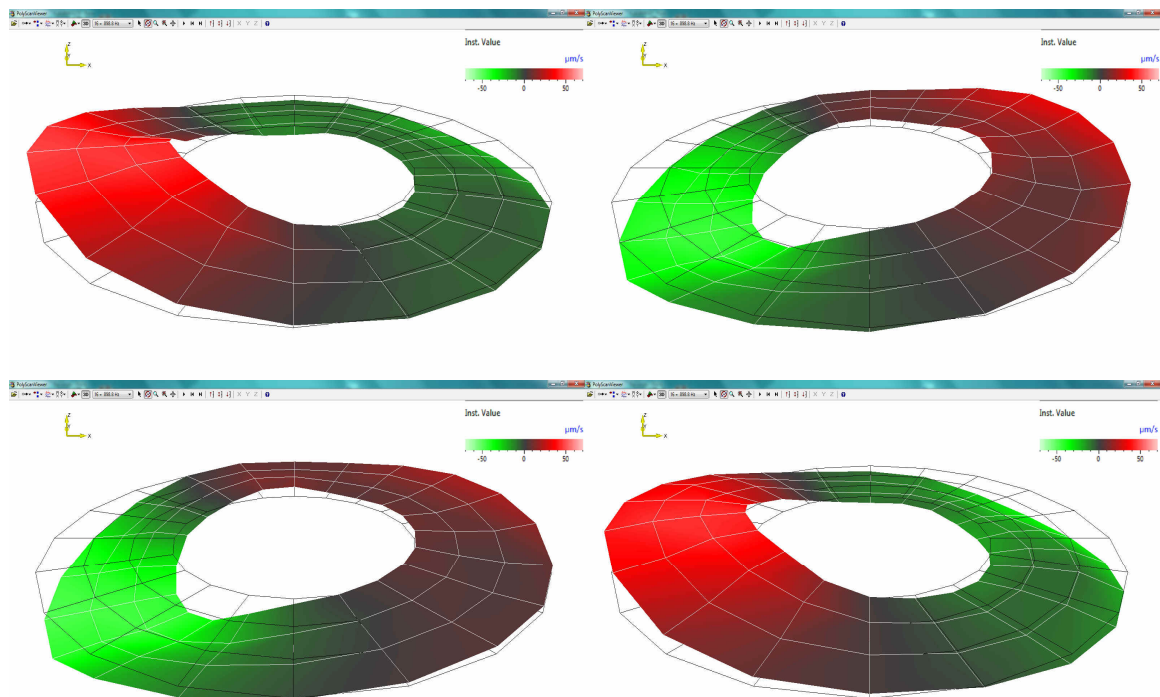


Rys. 4.8. Postać drgań tarczy łożyskowej z łożyskiem tocznym dla silnika o mocy 2,2 kW i  $2p=4$ , składowa 800 Hz dla fazy drgań w kolejności 0, 90, 180 oraz 270°, skala prędkości drgań od -70  $\mu\text{m/s}$  do +70  $\mu\text{m/s}$

Można zauważyć, że symetryczna fala odkształcenia stojana nie powodująca przemieszczenia geometrycznej osi silnika dla drgania o częstotliwości 100 Hz (drgania gnące w wyniku głównej fali indukcji) powoduje wyboczenie tarczy łożyskowej na całej jej powierzchni. Jest to postać obwodowa tarczy  $tn=0$  oraz promieniowa  $tm=0$ . Rysunki 4.6 oraz 4.12 przedstawiają postać drgań dla tej samej składowej widma, przy różnym łożyskowaniu. Dla łożyska tocznego zakres prędkości drgań jest około 10-krotnie mniejsza niż przy łożysku ślizgowym. Biorąc pod uwagę brak sztywności węzła

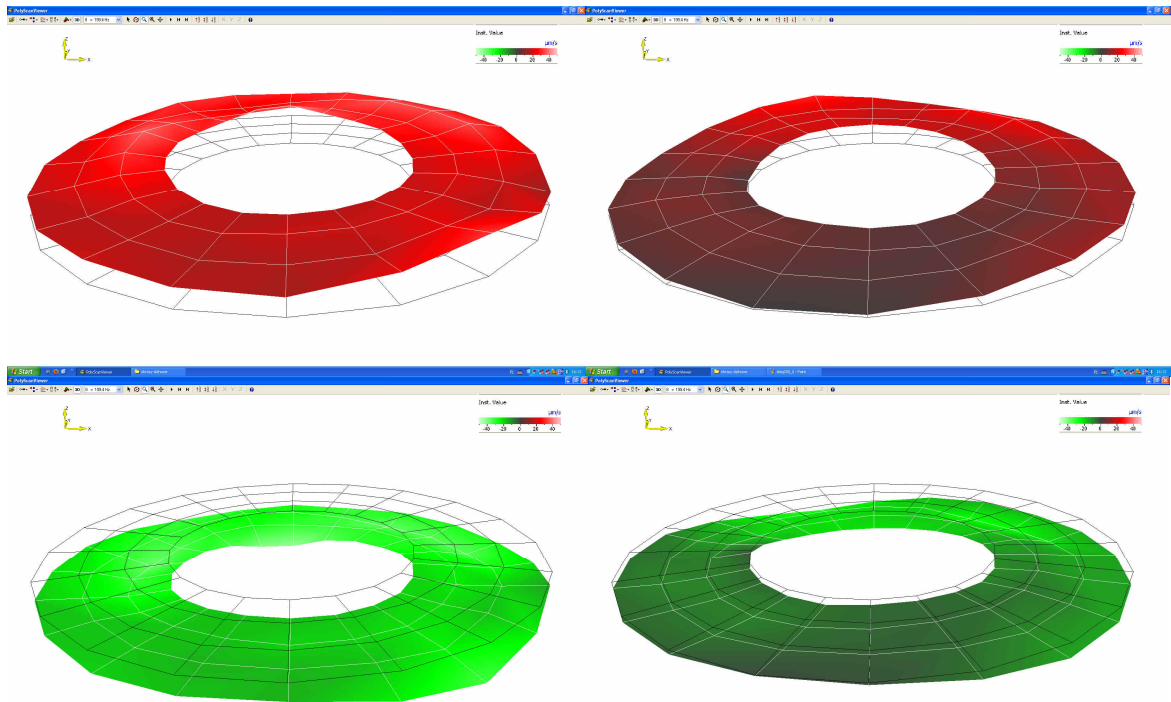
łożyskowego w kierunku osiowym dla łożyska ślizgowego, można domniemać, że tarcza łożyskowa odkształcana jest przez korpus stojana za pośrednictwem zamka tarczy i korpusu stojana. Drugą ewentualną przyczyną jej odkształcenia mogą być momenty gnące w wyniku siły jednostronnego naciągu magnetycznego, które są przenoszone na tarczę przez wał maszyny.

Drgania obwodowe tarczy rzędu  $tn=0$  są wynikiem symetrycznego wybożenia tarczy w całym obwodzie przez kadłub za pośrednictwem zamka. Przy łożysku tocznym takie drgania tarczy są tłumione poprzez łożyska i wał wirnika, które z kolei ulegają zmianie w funkcji temperatury pracy oraz obciążenia zużycia łożysk. Natomiast przy zastosowaniu łożyska ślizgowego drgania tarczy w kierunku osiowym są tłumione tylko w zakresie oporów filmu olejowego czopu wału. Dla drgań obwodowych tarczy rzędu  $tn=1$  sytuacja jest zupełnie inna, ponieważ te drgania są wynikiem niesymetrycznego odkształcenia tarczy przy zamku z korpusem stojana, a na wysokości węzła łożyskowego tarcza nie podlega wybożeniu tylko zginaniu. Przy takiej formie istotne są mniejsze luzy promieniowe łożyska ślizgowego, dlatego amplitudy drgania tarczy dla tej postaci są nieco mniejsze.

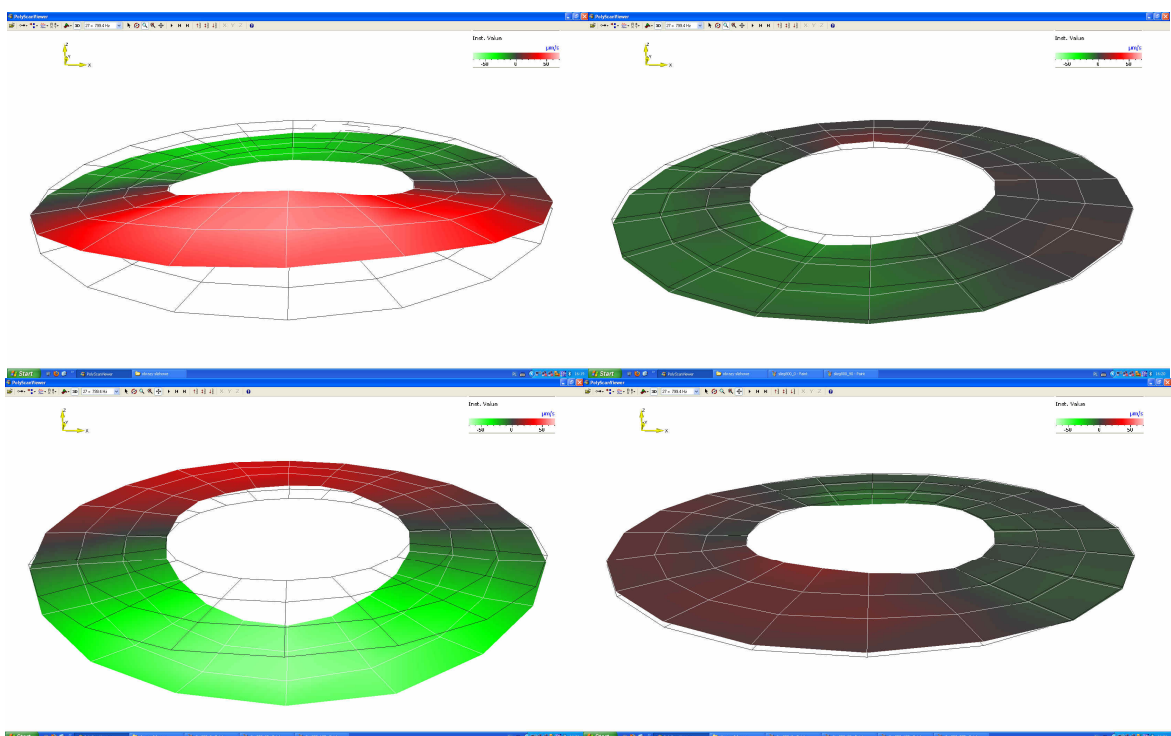


Rys. 4.9. Postać drgań tarczy łożyskowej z łożyskiem tocznym dla silnika o mocy 2,2 kW i  $2p=4$ , składowa 900 Hz dla fazy drgań w kolejności 0, 90, 180 oraz 270°, skala prędkości drgań od -70  $\mu\text{m/s}$  do +70  $\mu\text{m/s}$

# BADANIA DRGAŃ TARCZY ŁOŻYSKOWEJ PODCZAS PRACY SILNIKA

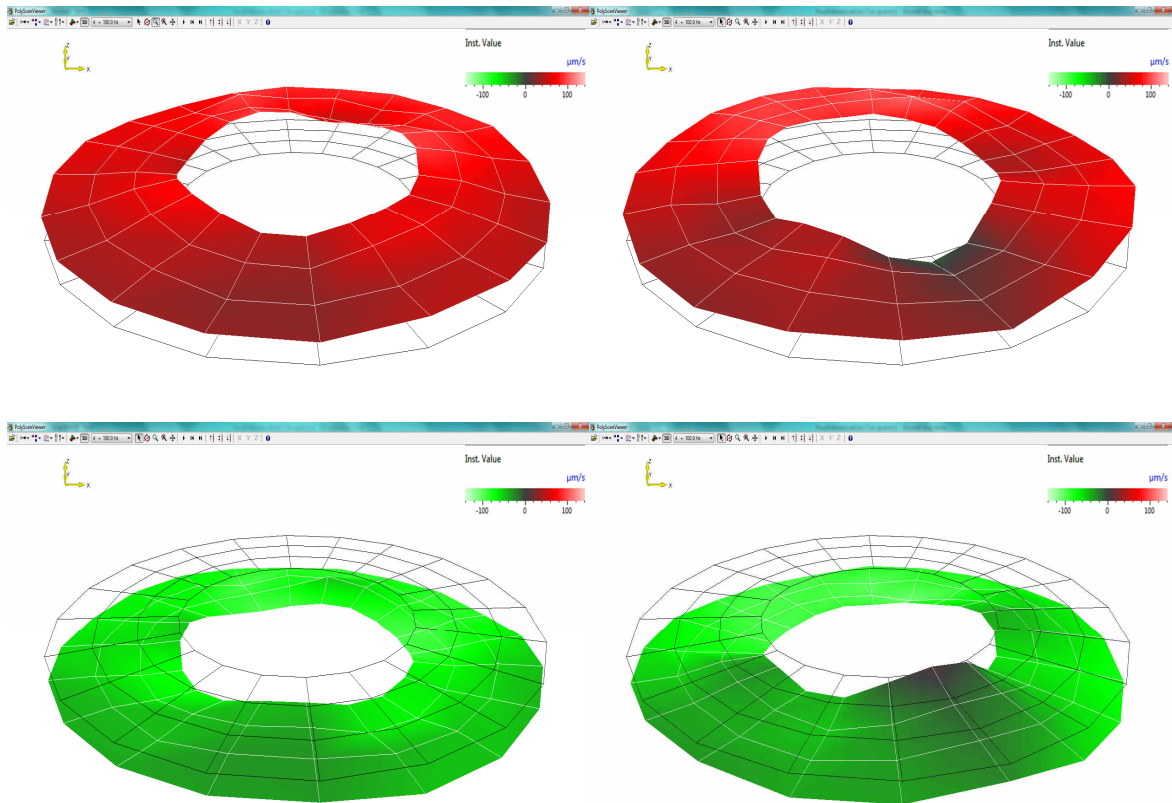


Rys. 4.10. Postać drgań tarczy łożyskowej z łożyskiem ślizgowym dla silnika o mocy 2,2 kW i  $2p=4$ , składowa 200 Hz dla fazy drgań w kolejności 0, 90, 180 oraz 270°, skala prędkości drgań od  $-40\mu\text{m/s}$  do  $+40\mu\text{m/s}$



Rys. 4.11. Postać drgań tarczy łożyskowej z łożyskiem ślizgowym dla silnika o mocy 2,2 kW i  $2p=4$ , składowa 800 Hz dla fazy drgań w kolejności 0, 90, 180 oraz 270°, skala prędkości drgań od  $-70\mu\text{m/s}$  do  $+70\mu\text{m/s}$

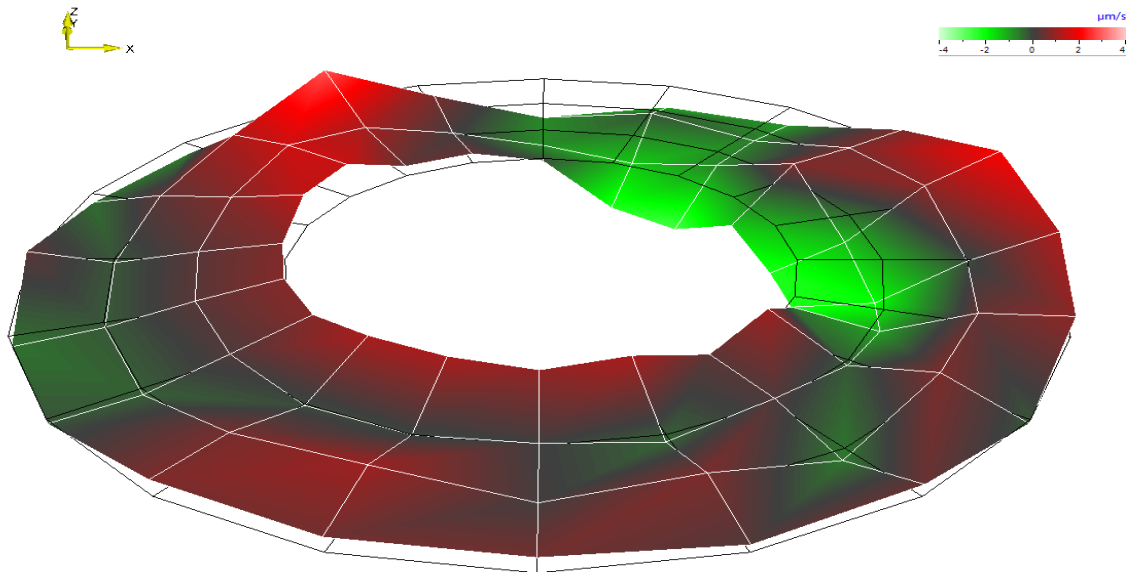




Rys. 4.12. Postać drgań tarczy łożyskowej z łożyskiem ślizgowym dla silnika o mocy 2,2 kW i  $2p=4$ , składowa 100 Hz dla fazy drgań w kolejności 0, 90, 180 oraz 270°, skala prędkości drgań od  $-140\mu\text{m/s}$  do  $+140\mu\text{m/s}$

Omawiany przypadek występuje dla składowej o częstotliwości 100 Hz (rys. 4.12) oraz 200 Hz (rys. 4.10). Zaobserwowano, że dla tych postaci drgań występuje jednoczesne odkształcenie obu tarcz w przeciwnych kierunkach. Przy dobrze spasowanych łożyskach tocznych powstaje siła reakcji, która działają przeciwnie do siły odkształcania tarczy.

Dla obniżonego napięcia silnika na podstawie widma z rysunku 4.5 i postaci drgań z rysunku 4.13, można zauważyć, że znaczącą przyczyną postaci drgań tarczy są siły stojana powodujące odkształcenia w pobliżu zamka tarczy łożyskowej. Gdy wzdłużna postać odkształcenia stojana przybiera rząd pierwszy  $s_m=1$ , mimo uzyskania obwodowej postaci tarczy łożyskowej rzędu pierwszego  $t_n=1$ , zauważalny jest znacznie słabszy wpływ odkształcenia kadłuba na odkształcenie tarczy łożyskowej. Niemniej wpływ promieniowego odkształcenia stojana rzędu pierwszego  $s_n=1$  na odkształcenie obwodowe tarczy łożyskowej rzędu pierwszego  $t_n=1$  został potwierdzony.



Rys. 4.13. Postać drgań tarczy łożyskowej z łożyskiem tocznym dla silnika o dwóch parach biegunów o mocy 2,2 kW i  $2p=2$ , składowa 200Hz dla napięcia zasilania 110V (skala prędkości drgań od  $-4\mu\text{m/s}$  do  $+4\mu\text{m/s}$ )

Pomiary przy obniżonym napięciu potwierdzają wcześniejsze spostrzeżenia dotyczące źródła drgań tarcz łożyskowych. Zmniejszony poziom wymuszenia elektromagnetycznego skutkowało zmniejszonymi naprężeniami reluktancyjnymi stojana, a więc i odkształceniami promieniowymi kadłuba. Odkształcenia promieniowe kadłuba o mniejszej amplitudzie powodują też mniejsze oddziaływanie na tarcze łożyskowe za pośrednictwem zamka. Mechanizm skutkuje obniżonym poziomem drgań tarczy łożyskowych.

Przeprowadzone badania potwierdzają, że spasowanie tarcz łożyskowych, ich sztywność oraz rodzaj łożysk ma wpływ na poziom drgań silnika [18]. Natomiast, już na tym etapie można podważyć powszechne przekonanie, że drgania tarcz łożyskowych są wynikiem tylko pracy łożysk.

## **5. ANALIZA MECHANIZMÓW ELEKTROMAGNETYCZNYCH WYMUSZEŃ DRGAŃ TARCZ ŁOŻYSKOWYCH Z WYKORZYSTANIEM MODELOWANIA MES**

Analizę oddziaływania wibracyjnych odkształceń kadłuba na wibracyjne odkształcenia tarczy łożyskowej wykonano metodą elementów skończonych MES w programie Autodesk Inventor. Wykorzystano model zbudowany dla potrzeb numerycznej analizy modalnej przeprowadzonej w rozdziale 4. Model numeryczny wykorzystywany w analizie MES jest wierną kopią rzeczywistego silnika poddanego badaniom. Dzięki takiemu podejściu możliwe było porównanie wyników analizy numerycznej i pomiarowej oraz ich weryfikacja. Silnik został zbudowany z modeli poszczególnych elementów składowych (stojan, kadłub, wał, wirnik, łożyska, tarcze), a następnie złożony w jedną całość. Określono materiały dla poszczególnych elementów, dla kadłuba i tarcz zastosowano żeliwo szare.

Model poddano działaniu sił zewnętrznych w celu uzyskania odpowiedniego kształtu kadłuba. Dzięki temu możliwe jest zbadanie wpływu oddziaływania odkształceń kadłuba na tarcze łożyskową oraz wpływ reakcji wału silnika na odkształcenie tarcz. Jedną z tez niniejszej rozprawy mówi o powiązaniu pewnych postaci drgań kadłuba z odpowiednimi postaciami drgań tarcz łożyskowych.

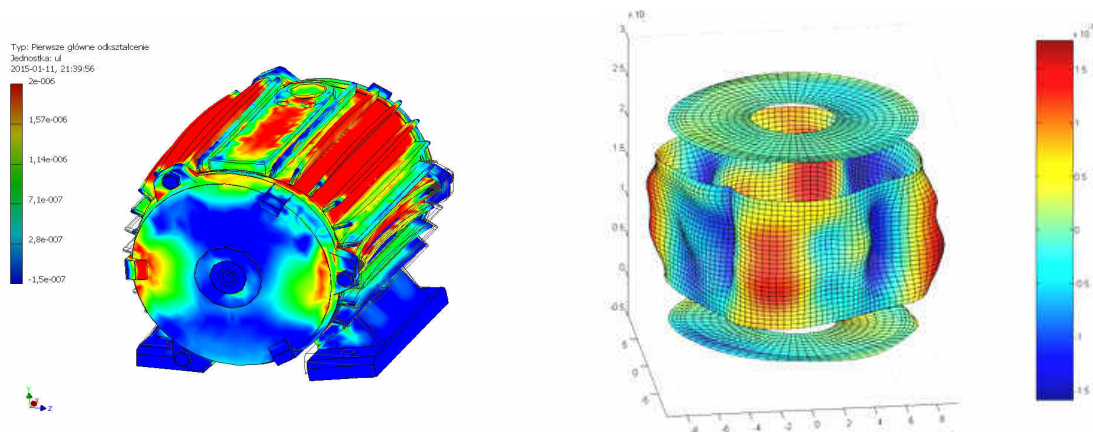
### **5.1. Weryfikacja poprawności modelu MES**

Przed przystąpieniem do analiz postaci drgań wyznaczonych z modelowania MES wykonano weryfikację poprawności modelu. W tym celu porównano wyniki obrazujące przestrzenny rozkład wymuszonej postaci drgań dwóch czterobiegunowych ( $2p=4$ ) silników o mocy 2,2 kW i 7,5 kW z zewnętrznymi wytoczeniami zamków tarcz łożyskowych. Najbardziej miarodajną poprawności modelu jest składowa drgań odległa od częstotliwości rezonansowej stojana lub tarczy łożyskowej, czyli o niskiej częstotliwości. Siła wymuszająca o znanej liczbie węzłów na obwodzie stojana i niskiej częstotliwości powstaje pod wpływem działania podstawowej częstotliwości harmonicznej indukcji w szczelinie powietrznej. Bezpośrednią przyczyną powstawania wibracyjnego odkształcenia

## ANALIZA MECHANIZMÓW ELEKTROMAGNETYCZNYCH WYMUSZEŃ DGRAŃ TARCZ ŁOŻYSKOWYCH Z WYKORZYSTANIEM MOELOWANIA MES

stojana o częstotliwości 100 Hz, a co zatem idzie kadłuba silnika, jest siła reluktancyjna powstająca w wyniku podstawowej fali indukcji w szczelinie przy zasilaniu o częstotliwości 50 Hz. Rysunek 5.1 przedstawia otrzymane z modelowania promieniowe odkształcenie stojana oraz wyznaczoną z pomiarów postać drgań innego silnika o analogicznych danych znamionowych. Pomiary w celu wyznaczenia ODSFRF były wykonane metodą RORO [12]. Jak łatwo stwierdzić, uzyskane obrazy postaci drgań są zbieżne. Również amplitudy przemieszczenia zewnętrznych powierzchni są tego samego rzędu. Widoczne rozbieżności wynikły prawdopodobnie z tego, że badany silnik [12] był pozbawiony żeber wentylacyjnych poprzez stoczenie kadłuba do gładkiej powierzchni walcowej.

Można przyjąć, że potwierdzono poprawność zbudowanego modelu i przeprowadzonych symulacji metodą elementów skończonych MES. Model uwzględnia wszystkie elementy silnika, zarówno łapy, uźebrowanie czy dodatkowe elementy służące do montażu tarczy łożyskowej do kadłuba.



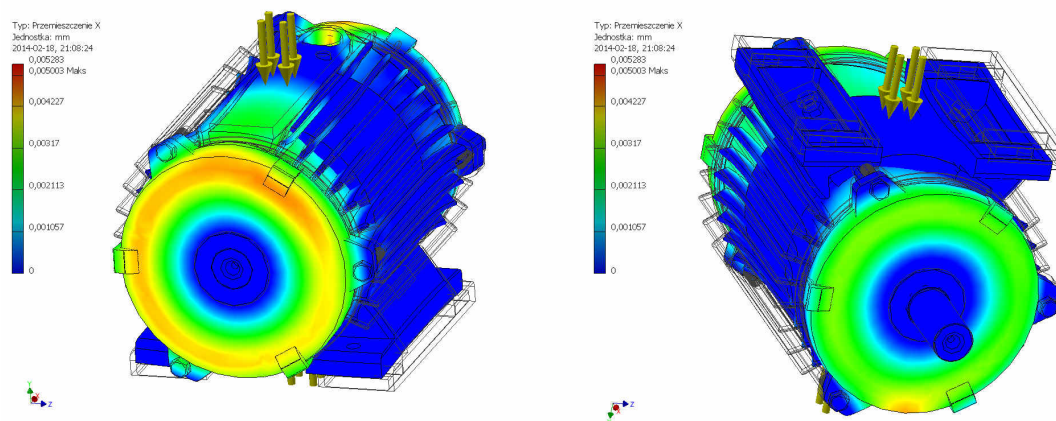
Rys. 5.1. Otrzymana z modelowania MES eksploatacyjna postać drgań silnika o mocy 2,2 kW częstotliwość 100 Hz, amplituda naprężenia promieniowego  $37000 \text{ N/m}^2$  oraz postać wyznaczona z ODSFRF metodą RORO [12]



## 5.2. Analiza oddziaływania wibracyjnych odkształceń kadłuba na osiowe odkształcenia tarcz łożyskowych - silnik o mocy 2,2 kW

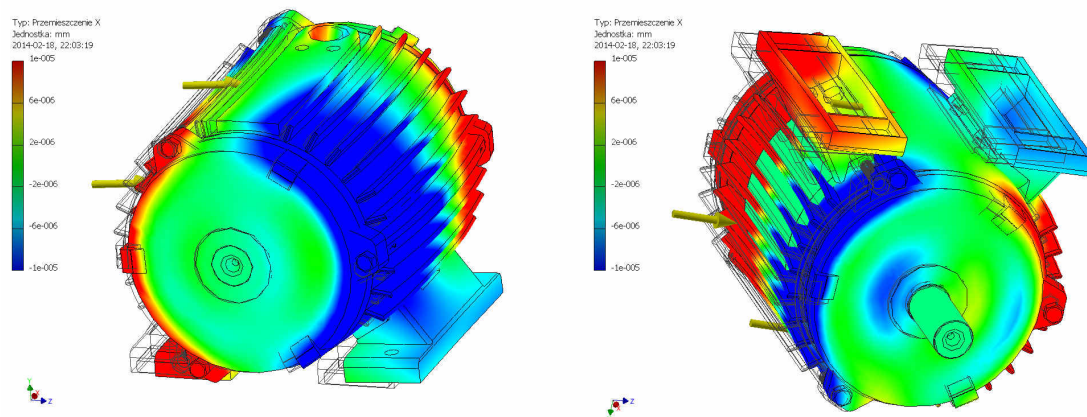
W zależności od postaci drgań kadłuba występuje inny sposób odkształcenia tarczy łożyskowej. Postać wibracyjnego odkształcenia kadłuba  $sn=0$  skutkuje symetrycznym na obwodzie tarczy odkształceniem osiowym rzędu  $tn=0$  (rys. 5.2). W tej sytuacji, gdy kadłub odkształca się symetrycznie po całym swoim obwodzie, tarcza łożyskowa podlega okresowo wyboczeniem na zewnątrz silnika.

Istotny mechanizm wymuszenia drgań tarczy powstaje przy promieniowej postaci drgań kadłuba  $sn=1$ . Taka postać wibracyjnego odkształcenia przesuwa geometryczny środek kadłuba względem osi wirnika. Skutkuje to wyboczeniem tarczy łożyskowej za pośrednictwem zamka w kierunku osiowym, a po przeciwległej stronie tarczy powoduje jej "wciąganie" również w kierunku osiowym. Tak więc, na tarcze zasadniczo działają zaczynają dwie siły wymuszające o kierunku osiowym ale o przeciwnych zwrotach. Skutkuje to odkształceniem tarczy rzędu pierwszego  $tn=1$  (rys. 5.3 i rys. 5.6), przy czym tego typu odkształcenie tarczy najwyraźniejsze jest dla wzdłużnego odkształcenia stojana rzędu zerowego  $sm=0$ .



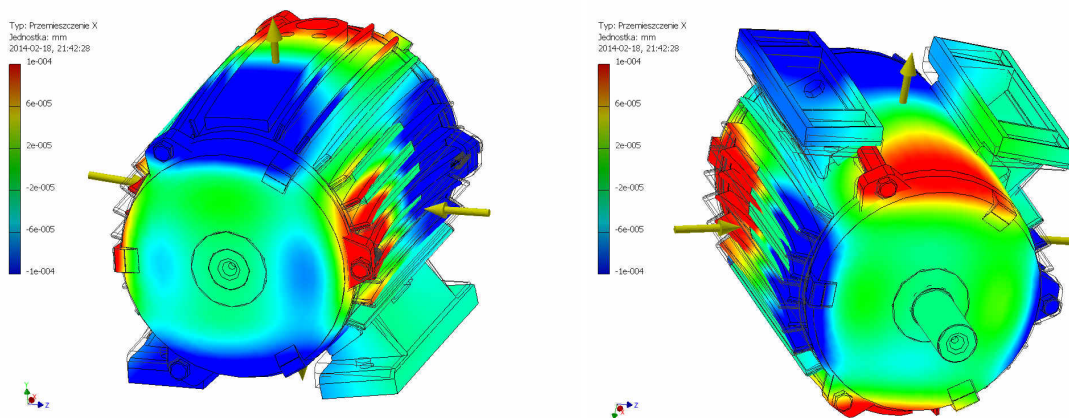
Rys. 5.2. Otrzymana z modelowania MES odpowiedź tarczy łożyskowej w kierunku osiowym na odkształcenie promieniowe stojana  $sn=0$  oraz wzdłużne stojana  $sm=1$

# ANALIZA MECHANIZMÓW ELEKTROMAGNETYCZNYCH WYMUSZEŃ DGRAŃ TARCZ ŁOŻYSKOWYCH Z WYKORZYSTANIEM MOELOWANIA MES



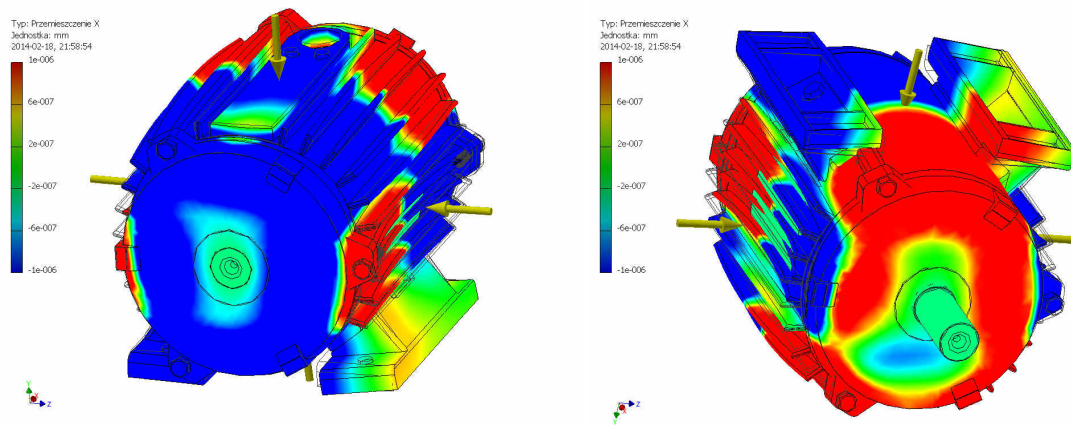
Rys. 5.3. Otrzymana z modelowania MES odpowiedź tarczy łożyskowej w kierunku osiowym na odkształcenie promieniowe stojana  $sn=1$  oraz wzdłużne stojana  $sm=1$

W przypadku, gdy odkształcenie promieniowe stojana jest wyższych rzędów, jak  $sn=2$ ,  $sn=4$  (rys. 5.4 i rys. 5.5), obwodowe odkształcenie tarczy łożyskowej przyjmuje skomplikowane obrazy wyższego rzędu, często trudne do określenia. Nadal jednak potwierdza się zależność występująca pomiędzy postaciami drgań stojana a tarczy łożyskowej. W przypadku odkształcenia promieniowego stojana rzędu  $sn=2$  otrzymuje się zauważalną obwodową postać tarczy rzędu  $tn=2$ . W przypadku odkształceń wyższego rzędu coraz słabiej jest widoczna obwodowa postać drgań tarczy - amplituda tych odkształceń maleje.

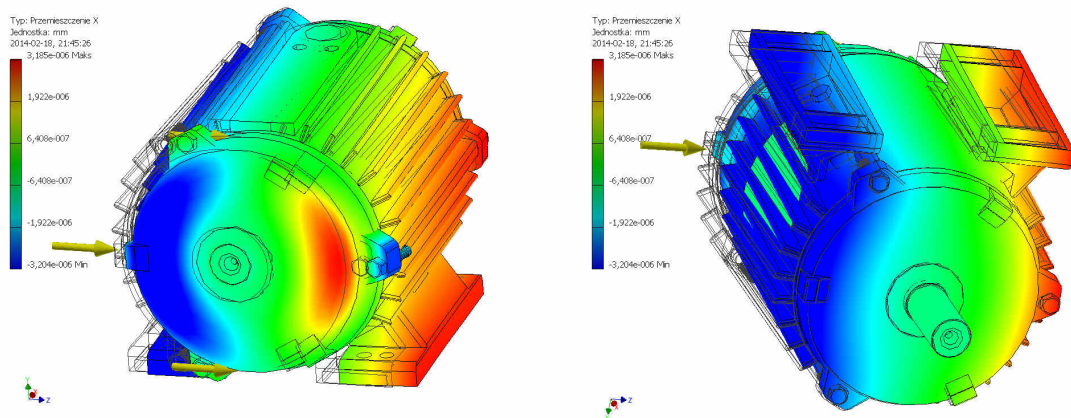


Rys. 5.4. Otrzymana z modelowania MES odpowiedź tarczy łożyskowej w kierunku osiowym na odkształcenie promieniowe stojana  $sn=2$  oraz wzdłużne stojana  $sm=1$

# ANALIZA MECHANIZMÓW ELEKTROMAGNETYCZNYCH WYMUSZEŃ DGRAŃ TARCZ ŁOŻYSKOWYCH Z WYKORZYSTANIEM MOELOWANIA MES



Rys. 5.5. Otrzymana z modelowania MES odpowiedź tarczy łożyskowej w kierunku osiowym na odkształcenie promieniowe stojana  $s_n=4$  oraz wzdłużne stojana  $s_m=1$

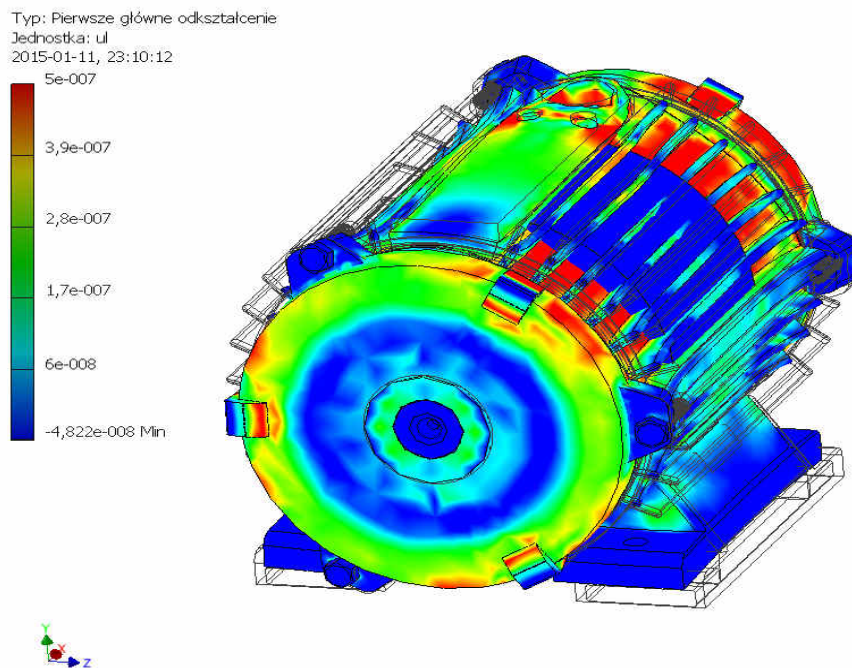


Rys. 5.6. Otrzymana z modelowania MES odpowiedź tarczy łożyskowej w kierunku osiowym na odkształcenie promieniowe stojana  $s_n=1$  oraz wzdłużne stojana  $s_m=0$

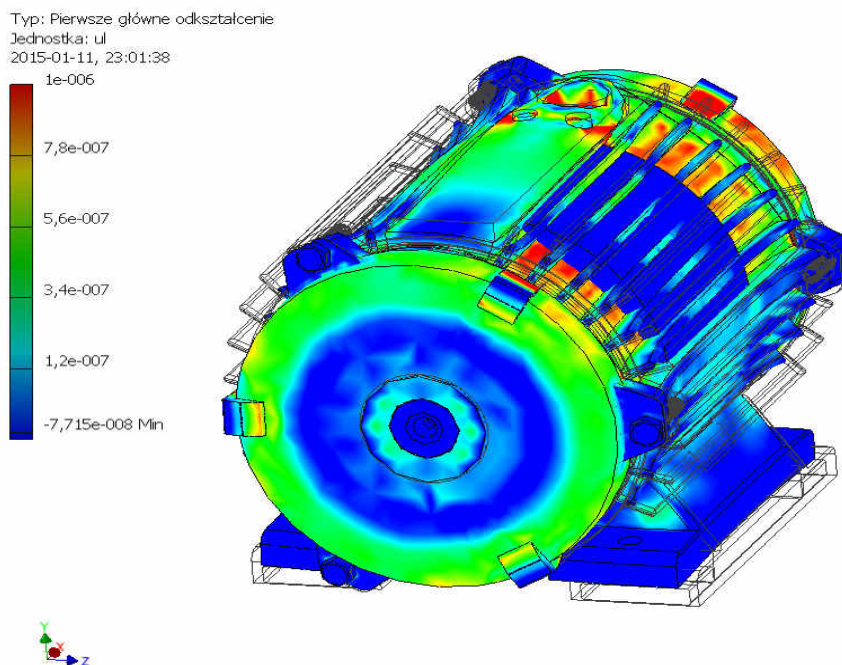
Podjęto również próbę zamodelowania konkretnych znanych przypadków wymuszeń dla silnika 2,2 kW. Przypadek pierwszy (rys. 5.7) przedstawia rzeczywiste wymuszenie stojana dla częstotliwości 200 Hz. Przy znanej liczbie par węzłów na obwodzie równej 0 i amplitudy naprężenia promieniowego stojana 10000 N/m<sup>2</sup> otrzymuje się rzeczywistą reakcję tarczy łożyskowej dla takiego wymuszenia. Wykonano analizę dla wymuszenia częstotliwości 600 Hz (rys. 5.8). Również w tych przypadkach uzyskuje się potwierdzenie omawianych mechanizmów. Należy podkreślić, że uzyskane z modelowania obrazy postaci drgań dotyczą osiowych drgań tarczy oraz osiowych drgań kadłuba silnika o mocy 2,2 kW, których wymuszeniami są fale sił elektromagnetycznych - reluktancyjnych w kierunku promieniowym.



# ANALIZA MECHANIZMÓW ELEKTROMAGNETYCZNYCH WYMUSZEŃ DGRAŃ TARCZ ŁOŻYSKOWYCH Z WYKORZYSTANIEM MOELOWANIA MES



Rys. 5.7. Otrzymana z modelowania MES eksploatacyjna postać drgań silnika o mocy 2,2 kW, częstotliwość 200 Hz, liczba par węzłów na obwodzie stojana  $s_n=0$ , amplituda naprężenia promieniowego stojana  $10000 \text{ N/m}^2$

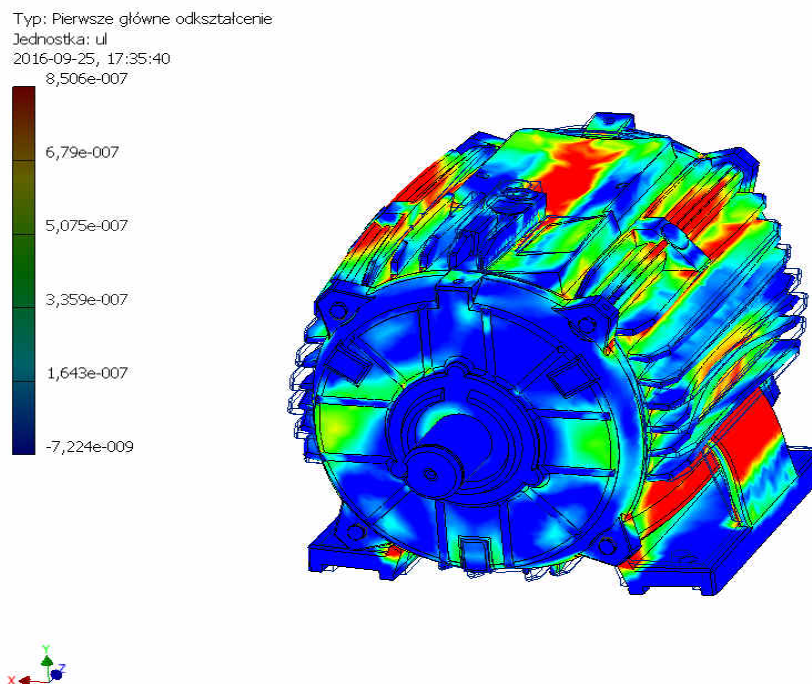


Rys. 5.8. Otrzymana z modelowania MES eksploatacyjna postać drgań silnika o mocy 2,2 kW, częstotliwość 600 Hz, liczba par węzłów na obwodzie stojana  $s_n=0$ , amplituda naprężenia promieniowego stojana  $16000 \text{ N/m}^2$

### 5.3. Analiza oddziaływania wibracyjnych odkształceń kadłuba na osiowe odkształcenia tarcz łożyskowych silnika o mocy 7,5 kW

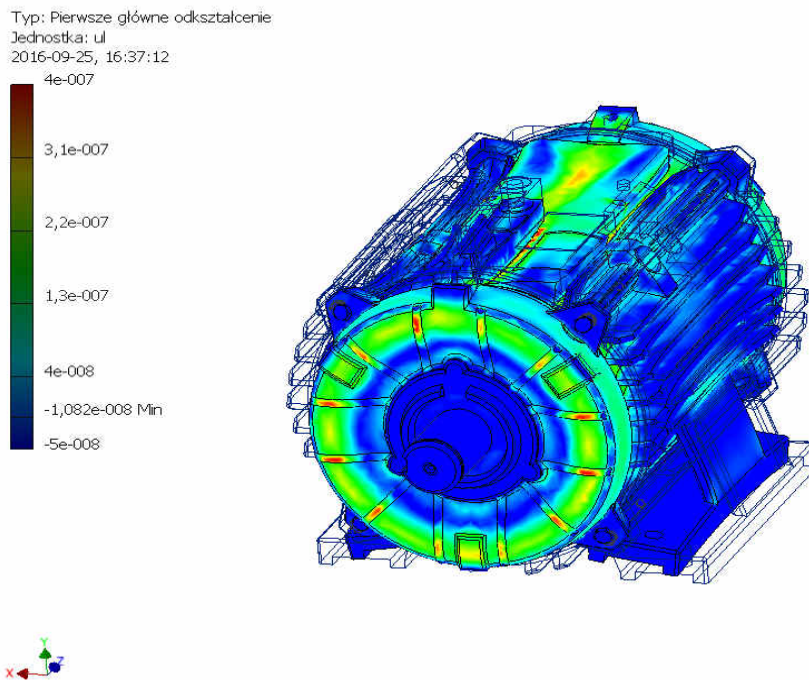
W celu oceny zgodności modelu numerycznego przeprowadzono obliczenia dla silnika o mocy znamionowej 7,5 kW. Badania przeprowadzono przy użyciu nowego oprogramowania Autodesk Inventor. Wprowadzono model 3D silnika typu Sg 132M-4 i dokonano symulacji zarówno postaci modalnych jak i eksploatacyjnych postaci drgań.

W celu weryfikacji modelu numerycznego wykonano obliczenia dla znaczących wymuszeń eksploatacyjnych pochodzenia elektromagnetycznego. Na rysunkach. 5.9 – 5.10 przedstawiono wyniki modelowania wymuszeń stojana. Promieniowa postać drgań stojana (maszyny o  $2p=4$ ) o częstotliwości 100 Hz jest rzędu  $sn=4$  (rys. 5.9). Odkształcenie tak wysokiego rzędu generuje mało widoczne odkształcenie obwodowe tarczy wyższego rzędu, które jest o mniejszej amplitudzie niż dla częstotliwości 200 Hz (rys.5.10).



Rys. 5.9. Otrzymana z modelowania MES eksploatacyjna postać drgań silnika o mocy 7,5 kW, częstotliwość 100 Hz, liczba par węzłów na obwodzie  $sn= 4$ , amplituda naprężenia promieniowego  $37000 \text{ N/m}^2$

# ANALIZA MECHANIZMÓW ELEKTROMAGNETYCZNYCH WYMUSZEŃ DGRAŃ TARCZ ŁOŻYSKOWYCH Z WYKORZYSTANIEM MOELOWANIA MES



Rys. 5.10. Otrzymana z modelowania MES eksploatacyjna postać drgań silnika o mocy 7,5 kW, eksploatacyjna postać drgań, częstotliwość 200 Hz, liczba par węzłów na obwodzie  $sn=0$ , amplituda naprężenia promieniowego  $10000 \text{ N/m}^2$

Podobnie jak dla silnika o mocy 2,2 kW, również dla silnika o mocy 7,5 kW uzyskane z modelowania obrazy postaci drgań dotyczą osiowych drgań tarczy oraz osiowych drgań kadłuba, których wymuszeniami są fale sił elektromagnetycznych - reluktancyjnych w kierunku promieniowym. Uzyskane wyniki wskazują, że znanym z literatury wibracyjnym odkształceniom promieniowym kadłuba towarzyszą drgania kadłuba w kierunku osiowym.

## 8. PODSUMOWANIE

Celem niniejszej rozprawy było, zatem wykazanie związków i mechanizmów drgań tarcz łożyskowych z wymuszeniami elektromagnetycznymi stojana. Przyjętymi metodami realizacji celu rozprawy była obliczeniowa i pomiarowa analiza eksploatacyjnych drgań tarcz łożyskowych w silniku asynchronicznym klatkowym małej mocy, w tym pochodzących od wymuszeń elektromagnetycznych.

Analizy wykonano na podstawie przeprowadzonych badań przy pomocy skanującego lasera dopplerowskiego oraz modelowania metodą elementów skończonych dla silnika klatkowego o mocy 2,2 kW oraz dodatkowo o mocy 7,5 kW, pracującego przy standardowych parametrach zasilania, jak i przy obniżonym napięciu, wyposażonego w łożyska toczne oraz zamiennie w specjalnie wykonane łożyska ślizgowe. Uzyskane wyniki zestawione z teoretycznymi składowymi częstotliwościowymi wymuszeń promieniowych elektromagnetycznych stojana pozwoliły potwierdzić I tezę mówiącą, że dominujące składowe widma drgań tarcz łożyskowych silników asynchronicznych małej mocy są wynikiem wymuszeń przez reluktancyjne naprężenia (naciski jednostkowe) na wewnętrznej powierzchni stojana.

Ponadto, porównanie częstotliwości drgań własnych struktury silnika wyznaczonych numerycznie z wyznaczonymi z pomiarów częstotliwościami dominant w widmie drgań tarczy pracującego silnika wskazuje, że dla tarcz łożyskowych maszyn małej mocy częstotliwości siły wymuszającej są odległe od częstotliwości drgań własnych. Dominujący jest zatem, mechanizm, w którym postaci drgań tarcz wynikają z wymuszeń i ich częstotliwości.

W wyniku analiz uzyskanych wyników badań potwierdzono II tezę rozprawy mówiącą o tym, że poszczególne postacie drgań stojana generują odpowiadające im dominujące postacie drgań tarcz łożyskowych w wyniku złożonych interakcji w zamkach tarcz i węzłach łożyskowych. Interakcje te zależą od sposobu i dokładności wytoczenia zamków tarcz łożyskowych, rodzaju i zużycia łożysk oraz stanu cieplnego maszyny. Wskazuje to jednoznacznie, że odkształcana wibracyjnie prawie płaska zewnętrzna powierzchnia tarczy może być promiennikiem akustycznym porównywalnym do membrany głośnika.

Badane silniki miały zewnętrzne wytoczenie zamków, przez co miejscowe odkształcenie kadłuba przy zamku w kierunku dośrodkowym nie powinno powodować

wyboczenia tarczy a jej rozciąganie przez miejscowa w kierunku odśrodkowym. Znamienne jest jednak dla większości analizowanych znaczących składowych drgań tarczy, że tarcza odkształca się tak jak przy wytoczeniu wewnętrznym. Wobec tego należy domniemać, że przyczyną wibracyjnych odkształceń tarczy może być jeszcze dodatkowe zjawisko.

Wyjaśnieniem tego zjawiska mogą być wyniki pomiarów za pomocą lasera oraz wyniki modelowania numerycznego metodą elementów skończonych dla odkształceń kadłuba w pobliżu zamków. W obu metodach zobrazowano drgania osiowe, a nie promieniowe, kadłuba w pobliżu zamków tarcz. W kierunku osiowym tarcza jest ściśle dociśnięta do krawędzi kadłuba przez skręcenie śrubami, i to zarówno przy zawnętrznym, jak i wewnętrznym wytoczeniu. W większości analizowanych przypadków miejsce osiowego odkształcenia tarczy jest tożsame z miejscem osiowego kadłuba. Można zatem, domniemać, że osiowe drgania tarcz łożyskowych w silnikach małej mocy są wynikiem wymuszanych elektromagnetycznie drgań kadłuba, zarówno w kierunku promieniowym, jak i osiowych. Mechanizm, jak dotąd ten nie był wzmiankowany ani w monografiach, np. [12, 7] ani w innych publikacjach światowych.

Pozostaje do wyjaśnienia w jaki sposób powstają osiowe drgania sztywnego w kierunku osiowym kadłuba maszyny małej mocy. Mogą one być wynikiem osiowych składowych sił elektromagnetycznych działających na przyszczelinowe powierzchnie pakietów. Najbardziej istotne wydają się jednak okresowe wydłużenia pakietu stojana w wyniku zjawiska magnetostrykcji. Ze względu na pokrywanie się częstotliwości większości składowych wywołanych przez siły reluktancyjne oraz wywołanych przez zjawisko magnetostrykcji, wyodrębnienie tych zjawisk jest utrudnione.



## Bibliografia

1. Belahcen A.: *Magnetoelasticity, magnetic forces and magnetostriction in electrical machines*, Helsinki University of Technology, Doctoral Thesis, 2004.
2. Besnerais J.L.: *Reduction of magnetic noise in PWM-supplied induction machines – low-noise design rules and multi-objective optimization*, Doctoral Thesis, Ecole Centrale de Lille, 2008.
3. Chakraverty S.: *Vibration of plates*. December 16, 2008 by CRC Press
4. Chang S. C.: *Electrical noise in small electrical motors*. IEE Conf. Proc. Eighth International Conference on Electrical Machines and Drives. Sept. 1997, s. 391-395
5. Finley W. R., Hodowanec M. M., Holter W. G.: *An analytical approach to solving motor vibration problems*. Proc. CIC IEEE 1999, s. 217-232.
6. Garvey S.D., Glew C.N.: *Magnetostrictive excitation of vibration in machines – a modal approach*, Ninth International Conference on electrical Machines and Drives, Conference Publication No.468, 1999.
7. Gieras J.F., Wang Ch., Lai J.Ch.: *Noise of polyphase electric motors*, Taylor & Francis CRC Press, 2005.
8. Hecquet M., Ait-Hammounda A., Goueygou M., Brochet M., Randria A.: *Prediction of the electromagnetic noise of an asynchronous machine using experimental designs*, *Mathematics and Computers in Simulation – Special issue: Modeling and simulation of Electric Machines*, Vol.71, June 2006.
9. Ishibashi F., Kamimoto K., Noda S., Itomi K.: *Small induction motor noise calculation*. IEEE Transactions on Energy Conversion, vol. 18, nr 3, 2003, s. 357-361.
10. Karkosiński D.: *Hałaśliwość silników asynchronicznych – podstawy nowych hipotez*. Automatyka, Elektryka, Zakłócenia, vol. 5, Nr 2 (16) 2014, s. 8-32.
11. Karkosiński D.: *Metody badania form odkształceń stojana maszyn elektrycznych*. Pomiar Automatyka Kontrola, 12'2003, s. 54-57
12. Karkosiński D.: *Zjawiska wibroakustyczne w asynchronicznych silnikach klatkowych*, Politechnika Gdańska, monografie nr 69, Gdańsk 2006
13. Karkosiński D., Wolejko M., Mosoń I.: *Experimental determination of induction motor's stator vibrational shapes for acoustic power level calculations*. UPEC'2003 38th International Universities Power Engineering Conference, 1-3 September 2003, Thessaloniki, Greece, s. 17-20.
14. Kwaśnicki S.: *Hałas magnetyczny silników indukcyjnych trójfazowych klatkowych*, Wyd. Komel, 1998.
15. Laftman L.: *The contribution to noise from Magnetostriction and PWM Inverter in a Induction Machine*, August 1995, Lund Institute of Technology, (PhD research).
16. Lehman S.: *Kraftwellen-Ordnungszahlen und Frequenzen magnetischer Geräusche bei Elektrischen Maschinen*. ETZ-A 1961, Bd.82, H.24, s.782-788
17. Łudziński Ł., Zieliński D.: *Pomiarowa analiza drgań tarcz łóżyskowych silników asynchronicznych laserem skanującym SLDV*. Pomiar Automatyka Robotyka, nr 11/2011, s74-79.
18. M. N. Anwar, Iqbal Husain, S. Graham Kelly: *Effects of End-Shields on the Stator Mode Frequencies of Electric Machines*. Industry Applications Conference, 2001. Thirty-Sixth IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2001 IEEE.

19. Mohammed O.A., Abed N.Y., Ganu S., Liu S.: *Acoustic noise signal evaluation due to magnetostrictive effects in electrical equipment*, International Conference on Wireless Communications and Applied Computational Electromagnetics, IEEE/ACES 2005.
20. Rao S. S.: *Mechanical Vibrations Fifth Edition.*, University of Miami 2011
21. Richardson M. H.: *Is it a mode shape, or an Operating deflection Shape?* Sound & Vibration Magazine 30<sup>th</sup> Anniversary Issue, March 1997, s. 1-11.
22. Sârbu M., Demeter E., Cistelecan M. V.: *Investigations for the lower noise three-phase cage induction motor, modal densities and radiation efficiencies.* International seminar on Vibration and Acoustic Noise of Electric Machinery, 25-26 May 1998 Béthum France, s. 45-49.
23. Schwartz B., Richardson M.: *Measurements required for displaying operating deflection shapes.* IMAC XXII, February 2629, 2004, s 1-6.
24. Szymaniec S.: *Drgania w silnikach indukcyjnych* – praca doktorska, Wyższa Szkoła Inżynierska, Opole, 1986.
25. Thrane N., Gade S.: *Use of operational deflection shapes for noise control of discrete tones.* Technical Review, Brüel&Kjær, nr 1, 1988, s. 23-31
26. Wang C., Lai J. C. S.: *Vibration analysis of an induction motor*, Journal of Sound and Vibration (1999) 224(4), 733-756
27. Witczak P.: *Wyznaczanie drgań mechanicznych silnika indukcyjnego wywołanych siłami magnetycznymi*, Zeszyty Naukowe nr 725, Rozprawy naukowe, Z.217, Politechnika Łódzka, Łódź 1995.
28. Wonki Bae, Yongsoo Kyong, Jedol Dayou, Kyi-hwan Park, Semyung Wang.: *Scaling the Operating Deflection Shapes Obtained from Scanning Laser Doppler Vibrometer.* Springer Science+Business Media, 03'2011, s. 92.
29. Wu Tianxing : *Torsional vibration analysis on circular and annular plates.* The Thirteenth International Congress on Sound and Vibration, Vienna, Austria, July 2-6, 2006.
30. Yang S.J.: *Low-noise electrical motors*, Clarendon Press, Oxford 1981.
31. Yang S.J., Ellison A. J.: *Machinery noise measurement.* Oxford: Clarendon Press 1985.
32. Zhu Z. Q., Chen Y. X.: *On the acoustic power radiated by an electrical machines and drives.* IEE Conf. Pub 1987, vol. 282, s. 118-121
33. Zieliński D., Łudziński Ł., Karkosiński D.: *Pomiary drgań i obliczenia akustyczne tarcz łożyskowych silników asynchronicznych zasilanych przekształtnikowo.* Pomiary Automatyka Kontrola, Nr 2, 2012
34. Zieliński D., Łudziński Ł., Karkosiński D.: *Wibroakustyczne właściwości tarcz łożyskowych silników asynchronicznych zasilanych przekształtnikowo.* Automatyka Elektryka Zakłócenia, Nr 6, 2011.